PISMENI ISPIT

10.07.2018.

Pravila

Pismeni ispit se piše 120 min te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Dozvoljeno je koristenje samo pribora za pisanje.

Zadatak 1 (25). *Neka je S skup svih simetričnih matrica $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ takvih da je*

$$tr\, A = 0 \qquad i \qquad a_{12} = a_{33} = 0\,.$$

Ispitajte je li S potprostor prostora $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ako jeste, označite njegovu bazu s B te odredite $\dim[\{A^3 : A \in B\}]$. *Nalazi li se jedinična matrica I u $[\{A^3 : A \in B\}]$?*

Zadatak 2 (20+10). *Neka je $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ preslikavanje zadano sa*

$$T(A) = \begin{bmatrix} tr(AB) & tr(BA) \\ tr(AB - BA) & tr(A^T B) \end{bmatrix},$$

gdje je $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

i) Dokažite da je T linearan operator, te mu odredite rang, defekt i po jednu bazu za jezgru i sliku.

ii) Odredite matrični prikaz operatora T u kanonskoj bazi prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Zadatak 3 (20). *Neka su x_1 i x_2 svojstveni vektori operatora $A \in L(V)$ za različite svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2. Ispitajte je li $x_1 + x_2$ svojstveni vektor operatora A? Svoje tvrdnje obrazložite.*

Zadatak 4 (25). *Neka je $\mathcal{P}_2$ unitaran prostor polinoma stupnja ≤ 2 sa skalarnim produktom*

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} t^2 p(t) q(t) dt\,.$$

i) Ortonormirajte skup $\{1, t, t^2\}$.

ii) Neka je $B \in L(\mathcal{P}_2)$ takav da je $B(p) = p''(t)$ za svaki $p \in \mathcal{P}_2$. Odredite B^*.