Odjel za matematiku
21. travnja 2016.

Prvi kolokvij iz Metoda optimizacije

1. [20 bod.] Napišite definiciju konveksnosti skupa. Neka su $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, gdje je

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2, \quad a \in \mathbb{R}\} \\ K_2 &= \{(x,y,z) : x^2+y^2-z \ge b^2, \quad b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Provjerite konveksnost skupova K_1, K_2, te $K_1 \cap K_2$.

2. [20 bod.]

   i) Napišite definicije stroge i jake konveksnosti funkcije.

   ii) Provjerite strogu i jaku konveksnost funkcije $f(x) = 2x^2 + x - 1$.

3. [20 bod.] Primjenom metode parabole odredite prve dvije aproksimacije minimuma funkcije $f(x) = |x-3| + x(x-5)$ i pripadne pogreške. Za početne točke u metodi parabole uzmite $a = 0, c = 3, b = 4$.

4. [20 bod.] Neka je $f \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $x^* \in D$ točka lokalnog minimuma od f. Dokažite da je tada njezin Hessijan $\nabla^2 f(x^*)$ u točki x^* simetrična pozitivno semidefinitna matrica.

5. [20 bod.] Neka je zadana funkcija $f(x,y) = -y + e^y + 4x(x+1) + 8$.

   i) Newtonovom metodom (s duljinom koraka 1) odredite prvu aproksimaciju minimuma funkcije f i pripadne pogreške, ako je početna aproksimacija $x^{(0)} = [-1 \quad -1]^T$.

   ii) Obrazložite da li je dobivena aproksmacija minimuma ili maksimuma? Točno iskažite teorem koji koristite i dokžite tvrdnju o brzini konvegencije.

6. [15 bod.] Iterativni proces za traženje točke lokalnog minimuma neprekidno diferencijabilne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je oblika

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

   gdje je p_k vektor smjera kretanja od točke x_k u točku x_{k+1}, a α_k duljina koraka u smjeru vektora p_k.

   a) Opišite algoritam za izračunavanje duljine koraka α_k kod gradijentne metode.

   b) Izvedite formulu za duljinu koraka kod metode "Aproksimativna minimizacija i traženje nultočaka".