

I. kolokvij iz Numeričke matematike

- [10 bod.] Odredite relativnu i apsolutnu pogrešku pri izračunavanju volumena V stošca, ako je $r = 3 \pm 0.005$ cm, $h = 5 \pm 0.001$ cm i $\pi \approx 3.14$.
 - [5 bod.] Kako se određuju signifikantne znamenke aproksimacije nekog realnog broja?
 - [5 bod.] Odredite koliki je broj signifikantnih znamenki broja $V^* = 47.1$ cm² i zapišite ga pomoću signifikantnih znamenki.
- [10 bod.] Odredite linearni interpolacijski spline za funkciju $f(x) = \sin\left(\frac{x\pi}{3}\right)$ u čvorovima $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3$ i skicirajte ga.
 - [10 bod.] Na koliko bi podintervala jednake duljine trebalo podijeliti $[\frac{1}{2}, 3]$ da pogreška aproksimacije funkcije f linearnim interpolacijskim splineom ne bude veća od $\epsilon = 10^{-4}$ u svim točkama?

3. Funkciju

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

interpoliramo polinomom P_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[0, 2]$.

- [10 bod.] Izračunajte Newtonov oblik interpolacijskog polinoma P_3 .
 - [5 bod.] Iskažite teorem o ocjeni pogreške interpolacijskog polinoma.
 - [10 bod.] Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 2]$.
4. [20 bod.] Neka ja dana kubična spline interpolacija

$$C(x) = \begin{cases} C_1(x) = 1 + 2x - x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ C_2(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases},$$

odredite konstante b , c i d tako da vrijede svi uvjeti za prirodni kubični spline.

- [3 bod.] Riješite sustav
$$\begin{bmatrix} 1 & 28 & 4 \\ 0 & 13 & 50 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 87 \\ 8 \end{bmatrix}.$$
 - [7 bod.] Procijenite relativnu pogrešku rješenja sustava iz b) dijela zadatka ako se vektor slobodnih koeficijenata promijeni za $\Delta b = [0 \ 0.01 \ 0.02]^T$. Kolika je relativna pogreška rješenja u odnosu na relativnu pogrešku vektora slobodnih koeficijenata?
 - [5 bod.] Odredite broj uvjetovanosti matrice sustava zadanog pod a).

* (Napomena. U ovom zadatku koristite $\|\cdot\|_\infty$.)