

II. kolokvij iz Numeričke matematike

1. [20 bod.] Riješite sustav $Ax = b$ koristeći LU faktorizaciju ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 7 \\ -15 & 5 & -9 \end{bmatrix} \text{ i } b = \begin{bmatrix} 19 \\ 39 \\ -32 \end{bmatrix}.$$

2. [20 bod.] Neka je dana funkcija $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 1$.

- Odredite intervale koji separiraju nultočke funkcije f .
- Odredite interval $[a, b]$ u kome se nalazi najmanja realna nultočka funkcije f i na kome su ispunjeni uvjeti konvergencije Newtonove metode.
- Možete li na tom intervalu definirati funkciju ϕ , tako da bude $f(x) = x - \phi(x)$ i da na tom intervalu budu ispunjeni uvjeti o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija?
- Odredite brojeve $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ i $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

3. [20 bod.]

- Što je najbolja aproksimacija funkcije $f \in C[a, b]$ na potprostoru $\mathcal{P} \subset C[a, b]$ ako je na $C[a, b]$ definirana norma $\|\cdot\|$?
- Neka je $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Odredite najbolju L_2 aproksimaciju od f na prostoru polinoma stupnja ≤ 1 uz $w \equiv 1$.

4. [20 bod.]

- Definirajte problem najmanjih kvadrata za podatke (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$ i model-funkciju $x \rightarrow f(x; a)$, $a \in \mathbb{R}$.
- Zadani su podaci:

x_i	-1	0	2	3
y_i	2	5	3	8

Odredite funkciju $f(x) = a_1 + a_2x$ takvu da njezin graf prolazi što bliže danim točkama $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Napišite funkciju koju je potrebno minimizirati.

5. [20 bod.] Produljenom trapeznom formulom za numeričku integraciju izračunajte integral

$$\int_2^3 x^2 \cdot \ln(x) dx$$

uz točnost $\epsilon = 0.05$. Koliko bi podintervala trebalo napraviti u Simpsonovoj formuli da bi se postigla točnost $\epsilon = 0.000005$?