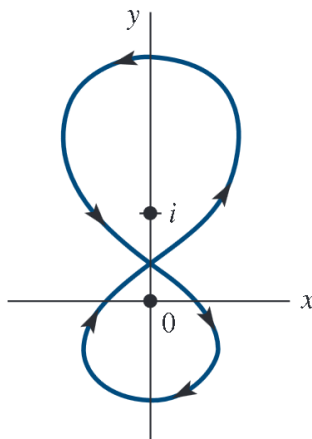


Drugi kolokvij iz Kompleksne analize

1. [20 bod.] Primjenom Cauchyjeve integralne formule izračunajte integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3 + 3}{z(z - i)^2} dz,$$

gdje je  $\Gamma$  krivulja prikazana na slici



2. i) [15 bod.] Funkciju

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{(z - 2)(z - 3)}$$

razviti u Laurentov red oko točke  $z_0 = 1$  u području  $D$  koje sadrži točku  $z_1 = -\frac{1}{2}$ .  
Skicirati područje konvergencije  $D$ .

- ii) [10 bod.] Odredite radijus konvergencije za red  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{3n}$ . Ispitajte konvergenciju na rubu područja.

3. [15 bod.] Odredite i klasificirajte singularitete funkcije  $f(z) = e^{\operatorname{tg} \frac{1}{z}}$ .
4. [20 bod.] Neka je  $C$  pozitivno orjentiran rub pravokutnika s vrhovima u točkama  $1 + 4i$ ,  $-1 + 4i$ ,  $-1 - i$  i  $1 - i$ . Odredite reziduume funkcije  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + \pi^2)^2 \sin z}$  u svim singularitetima koji se nalaze unutar područja određenog sa  $C$ . Izračunajte

$$\oint_C \frac{z^2}{(z^2 + \pi^2)^2 \sin z} dz.$$

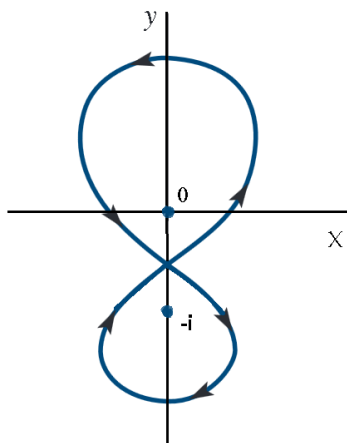
5. [20 bod.] Koristeći teorem o reziduuumima, izračunajte  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$ .

Drugi kolokvij iz Kompleksne analize

1. [20 bod.] Primjenom Cauchyjeve integralne formule izračunajte integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2 - 5}{z(z+i)^2} dz,$$

gdje je  $\Gamma$  krivulja prikazana na slici



2. i) [15 bod.] Funkciju

$$f(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}{(z+2)(z+3)}$$

razviti u Laurentov red oko točke  $z_0 = -1$  u području  $D$  koje sadrži točku  $z_1 = \frac{1}{3}$ .  
Skicirati područje konvergencije  $D$ .

- ii) [10 bod.] Odredite radijus konvergencije za red  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{2n}$ . Ispitajte konvergenciju na rubu područja.

3. [15 bod.] Odredite i klasificirajte singularitete funkcije  $f(z) = e^{\operatorname{ctg} \frac{1}{z}}$ .

4. [20 bod.] Neka je  $C$  pozitivno orijentiran rub pravokutnika s vrhovima u točkama  $1+i$ ,  $-1+i$ ,  $-1-4i$  i  $1-4i$ . Odredite reziduume funkcije  $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + \pi^2)^2 \sin z}$  u svim singularitetima koji se nalaze unutar područja određenog sa  $C$ . Izračunajte

$$\oint_C \frac{z^2}{(z^2 + \pi^2)^2 \sin z} dz.$$

5. [20 bod.] Koristeći teorem o reziduuumima, izračunajte  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)}$ .