Odjel za matematiku
23. travnja 2015.

Prvi kolokvij iz Metoda optimizacije

1. [15 bod.] Napišite definiciju konveksnosti skupa. Ako su $K_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ i $K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksni skupovi, da li je skup $K_1 \times K_2$ konveksan?

2. [20 bod.]

   i) Ako je funkcija $f \in C^1(D)$ konveksna na konveksnom skupu D, vrijedi li onda da je
   $$(\nabla f(y), x - y) \leq f(x) - f(y) \leq (\nabla f(x), x - y), \quad \forall x, y \in D\,?$$
   Svoju tvrdnju dokažite.

   ii) Provjerite je li funkcija
   $$f(x) = e^{-x+2} + 8$$
   konveksna, strogo konveksna, jako konveksna?

3. [15 bod.] Neka je dana funkcija $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 2x^2 + x$. Primjenom metode zlatnog reza odredite prve dvije aproksimacije minimuma funkcije i pripadne pogreške.

4. [20 bod.]

   i) Neka je $f \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, a $x^* \in D$ stacionarna točka od f u kojoj je Hessijan $\nabla^2 f(x^*)$ pozitivno definitan. Dokažite da je tada x^* točka strogog lokalnog minimuma funkcije f.

   ii) Odredite točke lokalnog minimuma funkcije $f(x_1, x_2) = \dfrac{8}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2} + x_2 + 5\,.$

5. [25 bod.] Neka je zadana funkcija $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 5$.

   i) Gradijentnom metodom odredite prvu aproksimaciju minimuma funkcije f i pripadne pogreške, ako je početna aproksimacija $x^{(0)} = [0 \quad 0]^T$, $h = \dfrac{1}{2}$ i $\epsilon = \dfrac{1}{2}$.

   ii) Da li će metoda konvergirati za početnu aproksimaciju $x^{(0)}$?

   Napomena: Potrebno je točno iskazati teorem koji ste koristili prilikom rješavanja zadatka.

6. [15 bod.] Iterativni proces za traženje točke lokalnog minimuma neprekidno diferencijabilne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je oblika
   $$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$
   gdje je p_k vektor smjera kretanja od točke x_k u točku x_{k+1}, a α_k duljina koraka u smjeru vektora p_k. Obrazložite kako odabrati vektor p_k tako da bude $f(x_{k+1}) < f(x_k)$? Kako računamo p_k kod Newtonove metode?