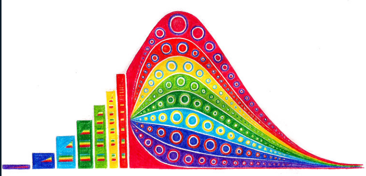

Numerička matematika

Tema: Interpolacija.

26. 10. 2020.

predavač: Kristian Sabo

asistent: Suzana Miodragović

Problem interpolacije: zadane su vrijednosti funkcije f u točkama $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. U području podataka ($[x_0, x_n]$) trebamo aproksimirati funkciju f nekom jednostavnijom poznatom funkcijom g tako da bude

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

- funkcija g obično se bira u klasi polinoma, trigonometrijskih, eksponencijalnih, racionalnih ili nekih drugih funkcija
- vrijednost funkcije f u nekoj točki x, $x \neq x_i$, procijenjujemo pomoću funkcije g tako da stavimo

$$f(x) \approx g(x)$$

Problem interpolacije: zadane su vrijednosti funkcije f u točkama $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. U području podataka ($[x_0, x_n]$) trebamo aproksimirati funkciju f nekom jednostavnijom poznatom funkcijom g tako da bude

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

- funkcija g obično se bira u klasi polinoma, trigonometrijskih, eksponencijalnih, racionalnih ili nekih drugih funkcija
- vrijednost funkcije f u nekoj točki x, $x \neq x_i$, procijenjujemo pomoću funkcije g tako da stavimo

$$f(x) \approx g(x)$$

Problem interpolacije: zadane su vrijednosti funkcije f u točkama $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. U području podataka ($[x_0, x_n]$) trebamo aproksimirati funkciju f nekom jednostavnijom poznatom funkcijom g tako da bude

$$g(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

- funkcija g obično se bira u klasi polinoma, trigonometrijskih, eksponencijalnih, racionalnih ili nekih drugih funkcija
- vrijednost funkcije f u nekoj točki x, $x \neq x_i$, procijenjujemo pomoću funkcije g tako da stavimo

$$f(x) \approx g(x)$$

Interpolacija polinomom

- tražimo **interpolacijski polinom** stupnja n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

takav da bude

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

$$
\begin{aligned}
a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 &= y_0 \\
a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 &= y_1 \\
&\vdots \\
a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 &= y_n
\end{aligned} \tag{2}
$$

- sustav (2) je uvijek rješiv i ima jedinstveno rješenje (determinanta matrice sustava je poznata Vandermondova determinanta, koja je uz uvjet $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ različita od nule)

$$
\begin{aligned}
a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 &= y_0 \\
a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 &= y_1 \\
&\vdots \\
a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 &= y_n
\end{aligned} \qquad (2)
$$

- sustav (2) je uvijek rješiv i ima jedinstveno rješenje (determinanta matrice sustava je poznata Vandermondova determinanta, koja je uz uvjet $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ različita od nule)

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

- treba pronaći polinom p_i stupnja n za koji vrijedi:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1\ ,\ j = i \\ 0\ ,\ j \neq i \end{cases} ,\ i, j = 0, 1, \ldots, n$$

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \end{aligned}$$

Zadatak 1.

Odredite interpolacijski polinom za podatke zadane tablicom:

x	1	2	3
y	3	1	2

Zadatak 2.

Odredite interpolacijski polinom za funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ u čvorovima $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

Zadatak 1.

Odredite interpolacijski polinom za podatke zadane tablicom:

x	1	2	3
y	3	1	2

Zadatak 2.

Odredite interpolacijski polinom za funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ u čvorovima $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

- interpolacijski polinom tražimo u obliku

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- nakon što odredimo koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vrijednost polinoma u nekoj točki $x \neq x_i$ računamo

$$P_n(x) = (\cdots(a_n(x - x_{n-1}) + a_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + a_1)(x - x_0) + a_0$$

- općenito za $n + 1$ točku $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

gdje brojeve

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_i] := \frac{f[x_1, \ldots, x_i] - f[x_0, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \quad i = 1, \ldots, n$$

zovemo **podijeljene razlike**, a ovako zapisan polinom Newtonov oblik interpolacijskog polinoma $n-$tog reda.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

- interpolacijski polinom tražimo u obliku

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- nakon što odredimo koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vrijednost polinoma u nekoj točki $x \neq x_i$ računamo

$$P_n(x) = (\cdots(a_n(x - x_{n-1}) + a_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + a_1)(x - x_0) + a_0$$

- općenito za $n + 1$ točku $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

gdje brojeve

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_i] := \frac{f[x_1, \ldots, x_i] - f[x_0, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \quad i = 1, \ldots, n$$

zovemo **podijeljene razlike**, a ovako zapisan polinom Newtonov oblik interpolacijskog polinoma $n-$tog reda.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

- interpolacijski polinom tražimo u obliku

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- nakon što odredimo koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vrijednost polinoma u nekoj točki $x \neq x_i$ računamo

$$P_n(x) = (\cdots(a_n(x - x_{n-1}) + a_{n-1})(x - x_{n-2}) + \cdots + a_1)(x - x_0) + a_0$$

- općenito za $n + 1$ točku $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

gdje brojeve

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_i] := \frac{f[x_1, \ldots, x_i] - f[x_0, \ldots, x_{i-1}]}{x_i - x_0}, \quad i = 1, \ldots, n$$

zovemo **podijeljene razlike**, a ovako zapisan polinom Newtonov oblik interpolacijskog polinoma $n-$tog reda.

Zadatak 3.

Odredite Newtonov oblik interpolacijski polinom za podatke zadane tablicom:

x	1	2	3
y	3	1	2

Zadatak 4.

Odredite Newtonov oblik interpolacijski polinom za podatke zadane tablicom:

x	1	2	3	4
y	3	1	2	0

Zadatak 3.

Odredite Newtonov oblik interpolacijski polinom za podatke zadane tablicom:

x	1	2	3
y	3	1	2

Zadatak 4.

Odredite Newtonov oblik interpolacijski polinom za podatke zadane tablicom:

x	1	2	3	4
y	3	1	2	0

Teorem

Neka je $f \in C^{n+1}_{[a,b]}$ funkcija čije vrijednosti su poznate u $(n+1)$ točaka x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

i neka je P_n odgovarajući interpolacijski polinom. Tada za svaki $\overline{x} \in [a, b]$ postoji $\xi \in \langle a, b \rangle$, tako da je

$$f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(\overline{x}), \quad \omega(\overline{x}) = (\overline{x} - x_0) \cdots (\overline{x} - x_n).$$

Zadatak 5.

Provjerite pogrešku interpolacije za funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ u čvorovima $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pogrešku procijenite u točki $\bar{x} = \frac{5}{12}$.

Zadatak 6.

Zadana je funkcija $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 2]$.

(a) Odredite interpolacijski polinom za f u čvorovima $0, \frac{1}{2}, 2$.

(b) Ocjenite grešku interpolacijskog polinoma iz prethodnog podzadatka.

(c) Na osnovu prethodnog podzadatka nađite uniformnu ocjenu za pogrešku za svaki $\bar{x} \in [0, 2]$.

(d) Kako bi trebalo odabrati čvorove tako da greška bude uniformno najmanja?

Zadatak 5.

Provjerite pogrešku interpolacije za funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ u čvorovima $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pogrešku procijenite u točki $\bar{x} = \frac{5}{12}$.

Zadatak 6.

Zadana je funkcija $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 2]$.

(a) Odredite interpolacijski polinom za f u čvorovima $0, \frac{1}{2}, 2$.

(b) Ocjenite grešku interpolacijskog polinoma iz prethodnog podzadatka.

(c) Na osnovu prethodnog podzadatka nađite uniformnu ocjenu za pogrešku za svaki $\bar{x} \in [0, 2]$.

(d) Kako bi trebalo odabrati čvorove tako da greška bude uniformno najmanja?