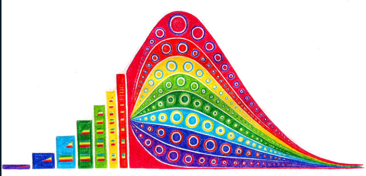


Numerička matematika i Numerička analiza

Tema: Rješavanje nelinearnih jednadžbi.

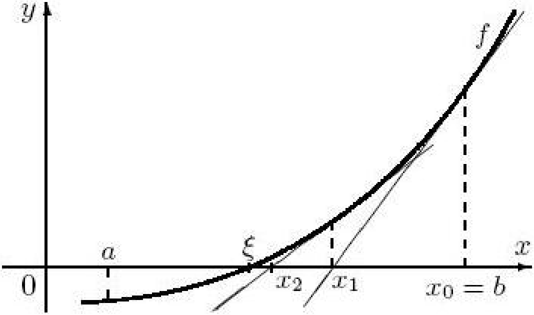
14. 12. 2020.

predavač: Kristian Sabo

asistent: Suzana Miodragović

Newtonova metoda

$$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$



- rješavamo jednadžbu $f_1(x) = 0$

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- ponavljajući postupak, dobivamo niz $x_0, x_1, \ldots$ zadan rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

- rješavamo jednadžbu $f_1(x) = 0$

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- ponavljajući postupak, dobivamo niz $x_0, x_1, \ldots$ zadan rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Neka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $I = [a, b]$. Neka je nadalje, $f(a) \cdot f(b) < 0$, a prva (f') i druga (f'') derivacija funkcije f na intervalu I imaju stalan predznak.
Tada, ako je $x_0 \in I$ izabran tako da bude

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

niz definiran s (1) konvergira prema jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$.

Pri tome vrijedi ocjena pogreške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2,$$

gdje je

$$m_1 = \min_{x\in I}|f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x\in I}|f''(x)|,$$

a metoda ima kvadratnu brzinu konvergencije, tj. vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2.$$

Zadatak 1.

Newtonovom metodom odredite negativnu nultočku funkcije $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$ uz točnost $\varepsilon = 0.00005$.

Zadatak 2.

Newtonovom metodom odredite nultočku funkcije $f(x) = x^3 - x - 1$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 3. (za vježbu)

Newtonovom metodom odredite realnu nultočku funkcije $f(x) = x^3 - x - 4$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 1.

Newtonovom metodom odredite negativnu nultočku funkcije $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$ uz točnost $\varepsilon = 0.00005$.

Zadatak 2.

Newtonovom metodom odredite nultočku funkcije $f(x) = x^3 - x - 1$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 3. (za vježbu)

Newtonovom metodom odredite realnu nultočku funkcije $f(x) = x^3 - x - 4$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 1.

Newtonovom metodom odredite negativnu nultočku funkcije $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$ uz točnost $\varepsilon = 0.00005$.

Zadatak 2.

Newtonovom metodom odredite nultočku funkcije $f(x) = x^3 - x - 1$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 3. (za vježbu)

Newtonovom metodom odredite realnu nultočku funkcije $f(x) = x^3 - x - 4$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 4.

Rekurzivnom formulom zadan je niz

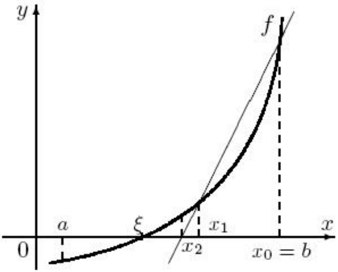
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad x_0 > a, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ispitajte konvergenciju ovog niza. Konvergira li navedeni niz ka nultočki funkcije $f(x) = x^2 - a$?

Metoda sekanti

- u intervalu I odaberemo dvije početne aproksimacije x_0 i x_1, te povučemo sekantu kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$. Sljedeću aproksimaciju x_2 dobit ćemo kao sjecište sekante s osi x

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}, \quad \text{ako je} \quad f(x_1) \neq f(x_0)$$



- ponavljajući postupak, dobivamo niz definiran rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad \text{ako je} \quad f(x_n) \neq f(x_{n-1}),$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

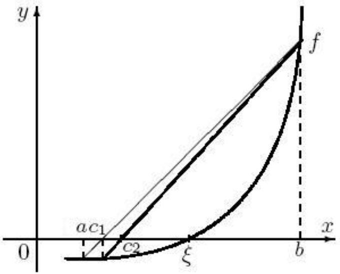
Zadatak 5.

Koristeći metodu sekanti odredite pozitivnu nultočku funkcije $f(x) = e^{-x} + 8x - 2$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Regula falsi (metoda krivih položaja)

- pretpostavimo da je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Označimo: $a_0 := a$, $b_0 := b$ i povucimo pravac točkama $(a_0, f(a_0))$, $(b_0, f(b_0))$. On siječe os x u točki

$$c_1 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}, \quad a_0 < c_1 < b_0$$



- ako je $f(c_1) = 0$, nultočka je pronađena; u protivnom postupimo na sljedeći način:
    - ako je $f(c_1)f(a_0) > 0$,

$$a_1 = c_1, \quad b_1 = b_0$$

    - inače

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_1$$

    - ponavljajući postupak, dobivamo niz definiran rekurzivnom formulom

$$c_{n+1} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, n = 1, 2, \ldots$$

Zadatak 6.

Koristeći metodu krivih položaja riješite jednadžbu $x^3 - 2x - 2 = 0$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 7. (za vježbu)

Koristeći metodu sekanti i metodu krivih položaja odredite nultočku funkcije $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$ uz točnost $\varepsilon = 0.00005$.

Iterativne metode za rješavanje lin. sustava

- Promatramo sustav $Ax = b$, gdje je A kvadratna regularna matrica. Tada sustav ima jedinstveno rješenje $x = A^{-1}b$.
- Matricu A rastavimo na sljedeći način

$$A = L + D + U,$$

gdje je L donje trokutasta matrica, U gornje trokutasta matrica i $D = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

- **Jacobijeva metoda:**

$$Dx^{(k+1)} = -(L + U)x^k + b, \quad k = 0, 1, \dots$$

- **Gauss-Seidelova metoda:**

$$(D + L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, \dots$$

Napomena

- Sljedeća rekurzivna formula obuhvaća obje metode:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, \dots$$

za $B = B_J := -D^{-1}(L+U)$ dobivamo Jacobijevu metodu, a za $B = B_{GC} := -(D+L)^{-1}U$ dobivamo Gauss-Seidelovu matodu.

- Jacobijeva metoda će konvergirati ako je A strogo dijagonalno dominantna (tj. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \ \forall i$). Slično se može pokazati da će i Gauss-Seidelova metoda konvergirati ako je A strogo dijagonalno dominantna.

Zadatak 1.

Ispitajte može li se sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix},$$

riješiti Jacobijevom metodom. Ako može, odredite prve dvije aproksimacije rješenja uz početnu aproksimaciju $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.

Za sustav iz prethodnog zadatka odredite prve dvije aproksimacije rješenja koristeći Gauss-Seidelovu metodu.

Zadatak 3.

Odredite matricu permutacije P tako da se sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

može riješiti primjenom Jacobijeve metode na sustav $PAx = Pb$, te odredite prve dvije aproksimacije rješenja.