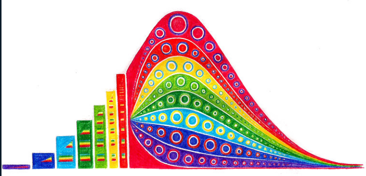

Numerička matematika

Tema: Rješavanje nelinearnih jednadžbi

21. 12. 2020.

predavač: Kristian Sabo

asistent: Suzana Miodragović

Iterativne metode za rješavanje lin. sustava

- Promatramo sustav $Ax = b$, gdje je A kvadratna regularna matrica. Tada sustav ima jedinstveno rješenje $x = A^{-1}b$.
- Matricu A rastavimo na sljedeći način

$$A = L + D + U,$$

gdje je L donje trokutasta matrica, U gornje trokutasta matrica i $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

- **Jacobijeva metoda:**

$$Dx^{(k+1)} = -(L + U)x^k + b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

- **Gauss-Seidelova metoda:**

$$(D + L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Napomena

- Sljedeća rekurzivna formula obuhvaća obje metode:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, \ldots$$

  za $B = B_J := -D^{-1}(L+U)$ dobivamo Jacobijevu metodu, a za $B = B_{GC} := -(D+L)^{-1}U$ dobivamo Gauss-Seidelovu matodu.
- Jacobijeva metoda će konvergirati ako je A strogo dijagonalno dominantna (tj. $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i$). Slično se može pokazati da će i Gauss-Seidelova metoda konvergirati ako je A strogo dijagonalno dominantna.

Zadatak 1.

Ispitajte može li se sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix},$$

riješiti Jacobijevom metodom. Ako može, odredite prve dvije aproksimacije rješenja uz početnu aproksimaciju $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Zadatak 2.

Za sustav iz prethodnog zadatka odredite prve dvije aproksimacije rješenja koristeći Gauss-Seidelovu metodu.

Zadatak 3.

Odredite matricu permutacije P tako da se sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

može riješiti primjenom Jacobijeve metode na sustav $PAx = Pb$, te odredite prve dvije aproksimacije rješenja.

Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

- rješavamo sustav nelinearnih jednadžbi

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

odnosno u vektorskom obliku $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, gdje je $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Primjer

Dan je sustav nelinearnih jednadžbi za parametar $\alpha \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2 + \alpha = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= -x_1 + x_2^2 + \alpha = 0 \end{aligned}$$

U ovisnosti o parametru α sustav može biti nerješiv ili može imati jedno, dva ili četiri rješenja.

Metoda jednostavnih iteracija

- analogno metodi jednostavnih iteracija za rješavanje nelinearne jednadžbe i sustav možemo zapisati u obliku

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, , x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

  gdje za funkcije φ_i obično postoji više izbora.
- definiramo niz aproksimacija

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

  gdje je $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ početna aproksimacija
- uz određene uvjete ovaj iterativni proces konvergirao prema rješenju sustava
- posebno, proces će konvergirati ako za sve $\mathbf{x}$ iz neke okoline $\mathbf{x}^{(0)}$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| < 1, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Zadatak 1.

Neka je zadan sustav:

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_1^2 + 32 - 9x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Uz početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 1)$ odredite prvih 5 aproksimacija rješenja koristeći metodu jednostavnih iteracija.

Newtonova metoda

- i Newtonova metoda može se generalizirati za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi
- izaberemo početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ i svaku od funkcija f_i razvijemo u Taylorov red u okolini $\mathbf{x}^{(0)}$, te odgovarajuću linearnu aproksimaciju označimo s $\tilde{f}_i$:

$$\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_j}(x_j - x_j^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, n$$

- rješavamo sustav

$$\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

što u matričnom obliku možemo zapisati na sljedeći način:

$$\mathbf{J}^{(0)}\mathbf{s} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) \tag{1}$$

gdje je

$$\mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(\mathbf{0})}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}^{(0)}) \end{bmatrix}$$

- Matricu $\mathbf{J}^{(0)}$ nazivamo Jacobijeva matrica ili Jacobijan sustava u točki $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

- nova aproksimacija rješenja tada je

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)}$$

gdje je $\mathbf{s}^{(0)}$ rješenje sustava (1)

- općenito dobivamo iterativni postupak

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

gdje je $\mathbf{s}^{(k)}$ rješenje sustava

$$\mathbf{J}^{(k)}\mathbf{s} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

pri čemu je $\mathbf{J}^{(k)}$ odgovarajuća Jacobijeva matrica u točki $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

Zadatak 2.

Neka je zadan sustav:

$$\begin{aligned} x_2(x_1 - 1) &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Uz početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 0)$ nađite prve dvije aproksimacije rješenja.

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna ($f \in C_{[a,b]}$)
- neka je d metrika koja dolazi od norme: $f, g \in C_{[a,b]}$

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

- norme:

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b w(x)|f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} - L_p \text{ norma} \quad p \in [1, \infty\rangle$$

pri čemu je $w(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ težinska funkcija

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} w(x)|f(x)| - \text{ Čebiševljeva } L_\infty \text{ norma}$$

- najčešće se koriste L_1 i L_2 norma, a L_2 norma jedina dolazi od skalarnog produkta

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \Longrightarrow \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$$

Zadatak 1.

Neka je $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Izračunajte L_1, L_2 i L_∞ normu od f uz $w(x) \equiv 1$.

Napomena

Ako je $\mathcal{P} \subset C_{[a,b]}$ normirani potprostor nekih jednostavnih funkcija (primjerice polinoma), onda kažemo da je $f^\star \in \mathcal{P}$ najbolja aproksimacija funkcije f na potprostoru $\mathcal{P}$ ako vrijedi:

$$\|f - f^\star\| \leq \|f - u\|, \quad \forall u \in \mathcal{P}$$

- neka je $f \in C_{[a,b]}$ te neka su $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in C_{[a,b]}$ linearno nezavisne
- odrediti najbolju aproksimaciju funkcije f na potprostoru $L(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ znači pronaći $\mathbf{a}^\star \in \mathbb{R}^{n+1}$, takav da je $F(\mathbf{a}^\star) = \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}} F(\mathbf{a})$, gdje je

$$F(\mathbf{a}) = \Big\| \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i - f \Big\|_2^2 = \int_a^b w(x) \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) - f(x) \Big)^2 dx$$

- nužan uvjet egzistencije vektora $\mathbf{a}^\star \in \mathbb{R}^{n+1}$ je $\operatorname{grad} F(\mathbf{a}^\star) = \left(\frac{\partial F}{\partial a_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_n}\right)^T = \mathbf{0}$, što vodi na rješavanje sustava jednadžbi

$$\begin{array}{rcl}
\langle \varphi_0, \varphi_0\rangle a_0^\star + \langle \varphi_0, \varphi_1\rangle a_1^\star + \cdots + \langle \varphi_0, \varphi_n\rangle a_n^\star & = & \langle \varphi_0, f\rangle \\
\langle \varphi_1, \varphi_0\rangle a_0^\star + \langle \varphi_1, \varphi_1\rangle a_1^\star + \cdots + \langle \varphi_1, \varphi_n\rangle a_n^\star & = & \langle \varphi_1, f\rangle \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
\langle \varphi_n, \varphi_0\rangle a_0^\star + \langle \varphi_n, \varphi_1\rangle a_1^\star + \cdots + \langle \varphi_n, \varphi_n\rangle a_n^\star & = & \langle \varphi_n, f\rangle
\end{array}$$

Zadatak 2.

Nađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = |x|$, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

(a) na prostoru polinoma stupnja ≤ 1;

(b) na prostoru polinoma stupnja ≤ 2,

uz težinsku funkciju $w \equiv 1$.

Zadatak 3.

Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Odredite najbolju L_2 aproksimaciju od f na prostoru polinoma stupnja ≤ 1 uz $w \equiv 1$.

Zadatak 2.

Nađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = |x|$, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

(a) na prostoru polinoma stupnja ≤ 1;

(b) na prostoru polinoma stupnja ≤ 2,

uz težinsku funkciju $w \equiv 1$.

Zadatak 3.

Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Odredite najbolju L_2 aproksimaciju od f na prostoru polinoma stupnja ≤ 1 uz $w \equiv 1$.