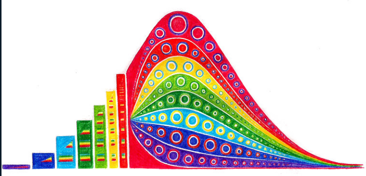

Numerička matematika

Tema: LU i Cholesky dekompozicija

30. 11. 2020.

predavač: Kristian Sabo

asistent: Darija Marković, Suzana Miodragović

- Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna kvadratna matrica. Tada je na jedinstven način moguće načiniti rastav

$$A = LU,$$

gdje je L donje trokutasta matrica kojoj su na glavnoj dijagonali jedinice, a U gornje trokutasta matrica.

Zadatak 1.

Odredi LU faktorizaciju matrice A ako je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -4 & -11 & -3 \\ 16 & -1 & 50 \end{bmatrix}.$$

- Sustav $Ax = b$ glasi
$$LUx = b,$$
uz oznaku
$$z := Ux$$
imamo
$$Lz = b.$$

Zadatak 2.

Riješite sustav $Ax = b$ koristeći LU faktorizaciju ako je A matrica iz prethodnog zadatka , a $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Zadatak 3.

Za matricu A iz prethodnog zadatka odredite njezin inverz koristeći LU dekompoziciju.

Zadatak 4.

Riješite sustav $Ax = b$ koristeći LU faktorizaciju ako je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 & -6 \\ 3 & -14 & -11 & 15 \\ 1 & 2 & -10 & 13 \\ -1 & 0 & -9 & -21 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 13 \\ -25 \\ -52 \\ 53 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 5.

Pokažite da je složenost računanja LU faktorizacije kvadratne matrice reda n jednaka:

$$C(n) = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n.$$

Napomena

- Računska složenost supstitucija unaprijed i unazad iznosi $\sim n^2$.
- Računska složenost rješavanja sustava koristeći LU faktorizaciju iznosi $\sim \frac{2}{3}n^3$.

Cholesky dekompozicija

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica;
- Cholesky dekompozicija matrice A je
$$A = LL^T,$$
gdje je L donje trokutasta matrica.
- Promotrimo
$$\begin{bmatrix} a_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{bmatrix}$$

Algoritam koji provodimo:

a) Izračunamo $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ i $L_{21} = \dfrac{1}{l_{11}} A_{21}$

b) Izračunamo L_{22} iz
$$A_{22} - L_{21} L_{21}^T = L_{22} L_{22}^T$$

Zadatak 1.

Pronađite Cholesky dekompoziciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.

Pronađite Cholesky dekompoziciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 9 \\ -6 & 9 & 14 \end{bmatrix}.$$

Napomena

Koristeći Cholesky dekompoziciju matrice A možemo riješiti sustav $Ax = b$:

$$LL^T x = b, z := L^T x$$

$$Lz = b.$$

Zadatak 3.

Za matricu A iz prethodnog zadatka uz pomoć Cholesky dekompozicije odredite rješenje sustava $Ax = b$, gdje je $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.