

# Numerička matematika

**Tema: Rješavanje nelinearnih jednažbi**

7. 12. 2020.



- $f$  realna neprekidna funkcija definirana na zatvorenom intervalu  $[a, b]$ . Svaki kompleksni broj  $\xi$  koji je rješenje jednažbe

$$f(x) = 0,$$

nazivamo nultočkom funkcije  $f$

- traženje realnog rješenja jednažbe svodi se na dva koraka:
  1. separirati interval  $I$  u kome funkcija ima nultočku,
  2. nekom iterativnom metodom odrediti aproksimaciju nultočke  $\xi$  s unaprijed zadanom točnošću.





## Zadatak 1.

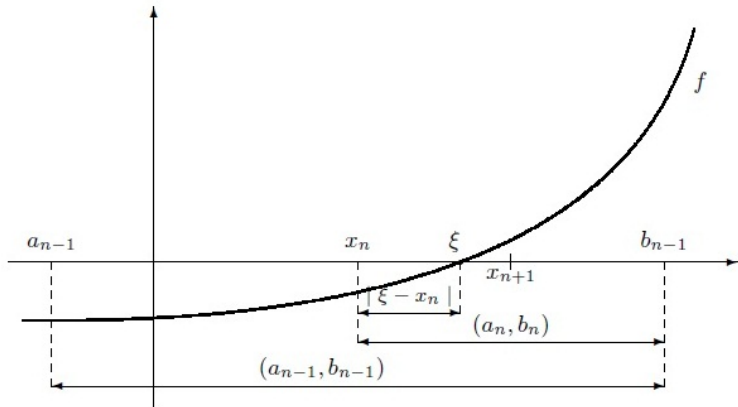
Separirajte intervale u kojima se nalaze nultočke funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x - 1.$$





# Metoda bisekcije





- $a_0 = a, b_0 = b$
- definiramo niz segmenata  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$  koji sadrži korijen jednažbe  $f(x) = 0$

$$x_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$$

- ako je  $f(a_{n-1}) \cdot f(x_n) < 0$ , tada je

$$a_n = a_{n-1} \quad \& \quad b_n = x_n$$

inače

$$a_n = x_n \quad \& \quad b_n = b_{n-1}$$





- linearna brzina konvergencije

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |\xi - x_n|$$

pri čemu vrijedi

$$|\xi - x_n| \leq \frac{1}{2} |b_{n-1} - a_{n-1}|$$





## Zadatak 2.

Metodom bisekcije odredite pozitivnu nultočku funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x - 1 \text{ uz točnost } \varepsilon = 0.05.$$

## Zadatak 3. (za vježbu)

Metodom bisekcije odredite nultočku funkcije  $f(x) = 2x - \ln x - 4$  uz točnost  $\varepsilon = 0.05$  (za početni segment uzmite  $[2, 2.5]$ ). (Rješenje:

$$x_{\text{approx}} = 2.46975)$$





## Zadatak 2.

Metodom bisekcije odredite pozitivnu nultočku funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x - 1 \text{ uz točnost } \varepsilon = 0.05.$$

## Zadatak 3. (za vježbu)

Metodom bisekcije odredite nultočku funkcije  $f(x) = 2x - \ln x - 4$  uz točnost  $\varepsilon = 0.05$  (za početni segment uzmite  $[2, 2.5]$ ). (Rješenje:

$$x_{\text{aprox}} = 2.46975)$$





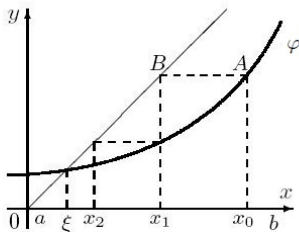


## Metoda jednostavnih iteracija

- jednažbu  $f(x) = 0$  možemo napisati u obliku

$$x = \varphi(x),$$

gdje za funkciju  $\varphi$  obično postoji više izbora.



- definiramo niz aproksimacija

$$x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \varphi(x_2), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$$



Neka je  $\varphi : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidno derivabilna funkcija za koju vrijedi:

- (i)  $\varphi(x) \in I$  za svaki  $x \in I$ ,
- (ii)  $\exists q \in \langle 0, 1 \rangle$ , takav da je  $|\varphi'(x)| \leq q$  za svaki  $x \in \langle a, b \rangle$ .

Tada postoji jedinstveni  $\xi \in I$  takav da bude  $\varphi(\xi) = \xi$ . Osim toga, za proizvoljni  $x_0 \in I$ , niz definiran s

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

konvergira prema  $\xi$  i vrijede ovakve ocjene pogreške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|,$$

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|.$$





Metoda ima linearnu brzinu konvergencije, tj. vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq q|\xi - x_n|.$$





### Zadatak 1.

Metodom jednostavnih iteracija riješite jednažbu  $x^3 - x - 1 = 0$  uz točnost  $\varepsilon = 0.0005$ .

### Zadatak 2.

Funkcija  $f(x) = x + \ln x$  ima jednostruku realnu nultočku  $\xi$  na intervalu  $[0.1, 1]$ . Koji od navedenih iterativnih procesa konvergira prema  $\xi$ ?

- (a)  $x_{n+1} = -\ln x_n$ ;
- (b)  $x_{n+1} = e^{-x_n}$ ;
- (c)  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n})$ .

### Zadatak 3.

Metodom jednostavnih iteracija odredite po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje jednažbe  $2x - \log x - 7 = 0$  uz točnost  $\varepsilon = 0.0001$ .





### Zadatak 1.

Metodom jednostavnih iteracija riješite jednačbu  $x^3 - x - 1 = 0$  uz tačnost  $\varepsilon = 0.0005$ .

### Zadatak 2.

Funkcija  $f(x) = x + \ln x$  ima jednostruku realnu nultočku  $\xi$  na intervalu  $[0.1, 1]$ . Koji od navedenih iterativnih procesa konvergira prema  $\xi$ ?

- (a)  $x_{n+1} = -\ln x_n$ ;
- (b)  $x_{n+1} = e^{-x_n}$ ;
- (c)  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n})$ .

### Zadatak 3.

Metodom jednostavnih iteracija odredite po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje jednačbe  $2x - \log x - 7 = 0$  uz tačnost  $\varepsilon = 0.0001$ .





### Zadatak 1.

Metodom jednostavnih iteracija riješite jednadžbu  $x^3 - x - 1 = 0$  uz točnost  $\varepsilon = 0.0005$ .

### Zadatak 2.

Funkcija  $f(x) = x + \ln x$  ima jednostruku realnu nultočku  $\xi$  na intervalu  $[0.1, 1]$ . Koji od navedenih iterativnih procesa konvergira prema  $\xi$ ?

- (a)  $x_{n+1} = -\ln x_n$ ;
- (b)  $x_{n+1} = e^{-x_n}$ ;
- (c)  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n})$ .

### Zadatak 3.

Metodom jednostavnih iteracija odredite po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje jednadžbe  $2x - \log x - 7 = 0$  uz točnost  $\varepsilon = 0.0001$ .

