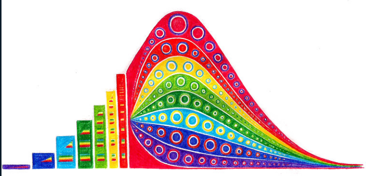

Numerička matematika

Tema: Aproksimacija funkcija. Fourierovi polinomi. Linearni problem najmanjih kvadrata.

11. 1. 2021.

predavač: Kristian Sabo

asistent: Suzana Miodragović

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna ($f \in C_{[a,b]}$)
- neka je d metrika koja dolazi od norme: $f, g \in C_{[a,b]}$

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

- norme:

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b w(x)|f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} - L_p \text{ norma} \quad p \in [1, \infty\rangle$$

pri čemu je $w(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ težinska funkcija

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} w(x)|f(x)| - \text{ Čebiševljeva } L_\infty \text{ norma}$$

- najčešće se koriste L_1 i L_2 norma, a L_2 norma jedina dolazi od skalarnog produkta

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \Longrightarrow \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$$

Zadatak 1.

Neka je $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Izračunajte L_1, L_2 i L_∞ normu od f uz $w(x) \equiv 1$.

Napomena

Ako je $\mathcal{P} \subset C_{[a,b]}$ normirani potprostor nekih jednostavnih funkcija (primjerice polinoma), onda kažemo da je $f^\star \in \mathcal{P}$ najbolja aproksimacija funkcije f na potprostoru $\mathcal{P}$ ako vrijedi:

$$\|f - f^\star\| \leq \|f - u\|, \quad \forall u \in \mathcal{P}$$

- neka je $f \in C_{[a,b]}$ te neka su $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in C_{[a,b]}$ linearno nezavisne
- odrediti najbolju aproksimaciju funkcije f na potprostoru $L(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ znači pronaći $\mathbf{a}^\star \in \mathbb{R}^{n+1}$, takav da je $F(\mathbf{a}^\star) = \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}} F(\mathbf{a})$, gdje je

$$F(\mathbf{a}) = \Big\| \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i - f \Big\|_2^2 = \int_a^b w(x) \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) - f(x) \Big)^2 dx$$

- nužan uvjet egzistencije vektora $\mathbf{a}^\star \in \mathbb{R}^{n+1}$ je $\operatorname{grad} F(\mathbf{a}^\star) = \left(\frac{\partial F}{\partial a_0}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial a_n}\right)^T = \mathbf{0}$, što vodi na rješavanje sustava jednadžbi

$$
\begin{array}{rcl}
\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle a_0^\star + \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle a_1^\star + \cdots + \langle\varphi_0,\varphi_n\rangle a_n^\star & = & \langle\varphi_0, f\rangle \\
\langle\varphi_1,\varphi_0\rangle a_0^\star + \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle a_1^\star + \cdots + \langle\varphi_1,\varphi_n\rangle a_n^\star & = & \langle\varphi_1, f\rangle \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\langle\varphi_n,\varphi_0\rangle a_0^\star + \langle\varphi_n,\varphi_1\rangle a_1^\star + \cdots + \langle\varphi_n,\varphi_n\rangle a_n^\star & = & \langle\varphi_n, f\rangle
\end{array}
$$

Zadatak 2.

Nađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = |x|$, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

(a) na prostoru polinoma stupnja ≤ 1;

(b) na prostoru polinoma stupnja ≤ 2,

uz težinsku funkciju $w \equiv 1$.

Zadatak 3. (Za vježbu)

Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Odredite najbolju L_2 aproksimaciju od f na prostoru polinoma stupnja ≤ 1 uz $w \equiv 1$.

Zadatak 2.

Nađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = |x|$, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

(a) na prostoru polinoma stupnja ≤ 1;

(b) na prostoru polinoma stupnja ≤ 2,

uz težinsku funkciju $w \equiv 1$.

Zadatak 3. (Za vježbu)

Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Odredite najbolju L_2 aproksimaciju od f na prostoru polinoma stupnja ≤ 1 uz $w \equiv 1$.

- $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, neprekidna. Definiramo $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Zadatak 1.

Odredite Fourierov red funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ zadane formulom $f(x) = -x$.

Napomena

(1) Ako je f neparna, tada je $a_k = 0$, za $k = 0, 1, \ldots$

(2) Ako je f parna, tada je $b_k = 0$, za $k = 1, 2, \ldots$

Zadatak 1.

Odredite Fourierov red funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ zadane formulom $f(x) = -x$.

Napomena

(1) Ako je f neparna, tada je $a_k = 0$, za $k = 0, 1, \ldots$
(2) Ako je f parna, tada je $b_k = 0$, za $k = 1, 2, \ldots$

Za $n \in \mathbb{N}$, $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, Fourierov polinom reda n je

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tada definiramo $u : [-\pi, \pi] \to [a, b]$ tako da je $u(-\pi) = a$ i $u(\pi) = b$

$$u(x) = a + \frac{b-a}{2\pi}(x + \pi)$$

- zadanu funkciju f transformirat ćemo u funkciju $\tilde{f} = f \circ u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ i za $\tilde{f}$ odredimo $\tilde{F}_n$. Fourierov polinom funkcije f definiran je s $F_n = \tilde{F}_n \circ u^{-1}$

$$u^{-1}(x) = \frac{2\pi}{b-a} x - \frac{\pi(a+b)}{b-a}$$

Zadatak 2.

Odredite Fourierov polinom funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

Zadatak 3.

Odredite Fourierov polinom funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

Zadatak 2.

Odredite Fourierov polinom funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

Zadatak 3.

Odredite Fourierov polinom funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}.$$

Problem najmanjih kvadrata

- Pretpostavimo općenito da zavisna varijabla y ovisi o nezavisnoj varijabli x po funkcionalnom zakonu

$$y = f(x; \mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ vektor parametara

- Osim toga, neka su zadani podaci

$$(x_i, y_i),\ i = 1, \dots, m, \quad m \geq n$$

- Neka je $\mathbf{r}$ vektor odstupanja (reziduala) s komponentama

$$r_i(\mathbf{a}) = f(x_i; \mathbf{a}) - y_i$$

- Treba pronaći točku $\mathbf{a}^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$ u kojoj funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirana s

$$F(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} r_i^2(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{r}(\mathbf{a})\|_2^2, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n,$$

  postiže globalni minimum
- Funkciju f nazivamo funkcija-model, vektor $\mathbf{r}$ vektor odstupanja ili reziduala, a brojeve $a_1^*, \ldots, a_n^*$, optimalni parametri. Problem određivanja optimalnih parametara $a_1^*, \ldots, a_n^*$, nazivamo problem najmanjih kvadrata

- U svrhu analize ekstrema funkcije F iskoristiti ćemo njezin specijalni oblik. Najprije ćemo izračunati gradijent funkcije F

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a_1} &= r_1 \frac{\partial r_1}{\partial a_1} + r_2 \frac{\partial r_2}{\partial a_1} + \cdots + r_m \frac{\partial r_m}{\partial a_1} \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial a_n} &= r_1 \frac{\partial r_1}{\partial a_n} + r_2 \frac{\partial r_2}{\partial a_n} + \cdots + r_m \frac{\partial r_m}{\partial a_n}
\end{aligned}$$

što možemo pisati i u matričnom obliku kao

$$\operatorname{grad} F = J^T r$$

- Matricu J nazivamo Jacobijeva matrica ili jednostavno Jacobijan funkcije F

Linearni problemi najmanjih kvadrata

- Pretpostavimo da je funkcija-model f linearna u svim parametrima $a_1, \ldots, a_n$ i da je općenito oblika

$$f(x; a_1, \ldots, a_n) = a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

gdje su φ_i neprekidne funkcije

- Jacobijeva matrica za ovakvu funkciju-model ne ovisi o $\mathbf{a}$. Imamo

$$r_i(\mathbf{a}) = a_1 \varphi_1(x_i) + \cdots + a_n \varphi_n(x_i) - y_i,$$

tj.

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial a_j} = \varphi_j(x_i), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

- Vektor odstupanja $\mathbf{r}$ s komponentama

$$r_i = a_1\varphi_1(x_i) + \cdots + a_n\varphi_n(x_i) - y_i$$

možemo pisati

$$\mathbf{r} = J\mathbf{a} - \mathbf{y}$$

- Traži se $\mathbf{a}^* \in \mathbb{R}^n$ tako da bude

$$F(\mathbf{a}^*) = \min_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n} F(\mathbf{a}), \text{ gdje je } F(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{r}(\mathbf{a})\|_2^2 = \frac{1}{2}\|J\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2$$

- Često puta se u literaturi ovako definiran LPNK označava kao

$$J\mathbf{a} \simeq \mathbf{y}$$

Zadatak 1.

Zadani su podatci

x_i	-4	-2	2	4
y_i	8	6	3	5

.

Pronađite linearnu funkciju $f(x) = a_1 + a_2 x$ tako da njezin graf prolazi što bliže točkama $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Rješavanje LPNK preko sustava normalnih jednadžbi

Kritične točke funkcije F dobit ćemo rješavanjem jednadžbe

$$J^T\mathbf{r} = 0$$

Lema

Neka je $J \in \mathbb{R}^{m\times n}, m > n$. Matrica $J^T J$ je pozitivno definitna onda i samo onda ako je J punog ranga po stupcima.

- u slučaju kada su uvjeti leme zadovoljeni LPNK je rješiv i postoji jedinstveno rješenje , koje možemo dobiti tako da pronađemo kritične točke funkcije F tj. riješimo jednadžbu

$$J^T J\mathbf{a} - J^T\mathbf{y} = 0$$

Zadatak 2.

Riješite sustav

$$
\begin{aligned}
x + y &= 0 \\
y + z &= 1 \\
x + z &= 0 \\
-x + y + z &= 1 \\
-x - z &= 0
\end{aligned}
$$

u smislu najmanjih kvadrata.

Zadatak 3.

Odredite LS pravac koji najbolje aproksimira podatke

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 1 & 2 & -3 & 4 \\ \hline y_i & 3 & 5 & 1 & -3 \end{array}.$$

Zadatak 4.(Za vježbu)

Odredite LS pravac koji najbolje aproksimira podatke

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 1 & 2 & 3 & -4 \\ \hline y_i & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}.$$

Rješavanje LPNK pomoću QR dekompozicije

$$J = QR$$

$$r = Ja - y = QRa - y$$

$$\|r\| = \|QRa - y\| = \|Q(Ra - Q^T y)\| = \|Ra - Q^T y\|$$

Zadatak 5.

Neka je

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Riješite LPNK koristeći QR dekompoziciju.

Zadatak 6.

Primjenom Householderovih transformacija odredite QR dekompoziciju matrice A te pomoću nje riješite LPNK ako je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$