Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
30. travnja 2019.

1. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Kako se definiraju signifikantne znamenke aproksimativnog broja $a^\star$? Odredite broj signifikantnih decimala aproksimativnog broja $a^\star = 34.25731$, ako je $a = 34.25731 \pm .5 \times 10^{-3}$.*

(b) *Neka je $r = 3.15 \pm 0.05$ dm radijus baze, a $h = 15.225 \pm 0.005$ dm visina stošca. Procijenite apsolutnu $\Delta V^\star$ i relativnu $\delta V^\star$ pogrešku kod izračunavanja volumena tog stošca.*

(c) *Ako je volumen stošca potrebno dobiti s točnošću $\Delta V^\star = 1\,\ell$, s kojom točnošću mora biti zadan radijus baze i visina tog stošca?*
(Kod (b) i (c) za broj π uzimamo dovoljno točnu vrijednost, da ne utječe na pogrešku.)

R: (a) Nastavni materijali, $k = 3$; *(b)* $\Delta V^\star \approx 5.074\,\mathrm{dm}^3 \approx 1.615\pi\,\mathrm{dm}^3, \delta V^\star \approx 0.032$;
(c) $\Delta r^\star \approx .005$ dm *(dvije decimale)*, $\Delta h^\star \approx .048$ dm *(jedna decimala)*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Uz koji uvjet postoji jedinstveni interpolacijski polinom?*

(b) *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama $T_0 = (-1, -2)$, $T_1 = (1, -6)$, $T_2 = (2, -14)$, $T_3 = (4, 18)$. Napišite ovaj polinom u Newtonovom i u Lagrangeovom obliku.*

R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $P_3(x) = 2x^3 - 6x^2 - 4x + 2$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Kako se definira Householderova matrica $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ i koja svojstva ima?*

(b) *Dokažite da za dva vektora $a, b \in \mathbb{R}^m$ jednake euklidske norme postoji Householderov vektor $u \in \mathbb{R}^m$, tako da je $Ha = b$, odnosno $Hb = a$.*

(c) *S kojom Householderovom matricom H treba s lijeve strane pomnožiti matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tako da se dobije gornjetrokutasta matrica?*

R: (a), (b) Nastavni materijali; *(c)* $H = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) *Kako se u matričnom obliku može zapisati Jacobijeva metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$?*

(b) *Koji uvjet mora ispunjavati matrica A da bi Jacobijev iterativni postupak konvergirao prema rješenju sustava?*

(c) *Može li se sustav $Ax = b$, gdje je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = (2, 6)^T$, riješiti Jacobijevom* *metodom? Ako može, odredite prve četiri iteracije počevši od* $x^0 = (0,0)^T$.

R: (a), (b) Nastavni materijali;
(c) $x^\star = (0,2)^T$, $x^k \in \{(1,2)^T, (0, 1.667)^T, (.1667, 2)^T, (0, 1.944)^T\}$

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Koje uvjete treba ispunjavati funkcija* φ *na intervalu* $[a,b]$ *da bi rekurzivni niz* $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ *konvergirao prema rješenju* ξ *jednadžbe* $f(x) = x - \varphi(x) = 0$*? Pokažite da je uz te uvjete* ξ *jedinstveno rješenje jednadžbe* $f(x) = 0$.

(b) *Odredite interval* $[a,b]$ *na kome funkcija* $f(x) = -x^3 + 3x$ *ima pozitivnu nultočku. Definirajte odgovarajuću funkciju* $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*, s kojom je moguće provesti metodu jednostavnih iteracija.*

(c) *Provedite metodu jednostavnih iteracija i odredite prve tri aproksimacije počevši od* $x_0 = 1$*. Koju ste točnost rješenja na taj način postigli?*

R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $\varphi\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt[3]{3x}$, $q = .481$;
(c) $x^\star = \sqrt{3} \approx 1.73205$, $x_k \in \{1.44, 1.63, 1.697\}$, $|\xi - x_3| \le \frac{q^3}{1-q}|1.44 - 1| = .09$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
30. travnja 2019.

1. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Kako se definira apsolutna pogreška vrijednosti funkcije* $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ *u točki* $x_1^\star, \ldots, x_n^\star$ *ako je* $x_i = x_i^\star \pm \Delta x_i^\star$, $i = 1, \ldots, n$? *Kolike su apsolutne pogreške funkcijâ* $z(x, y) = x + y$ *i* $z(x, y) = x \cdot y$.

(b) *Neka je* $a = 3.15 \pm 0.05\,\mathrm{cm}$ *stranica, a* $h = 15.225 \pm 0.005\,\mathrm{cm}$ *visina pravilne trostrane piramide. Procijenite apsolutnu* $\Delta V^\star$ *i relativnu* $\delta V^\star$ *pogrešku kod izračunavanja volumena te piramide.*

(c) *Ako je volumen pravilne trostrane piramide potrebno dobiti s točnošću* $\Delta V^\star = 1\,m\ell$, *s kojom točnošću mora biti zadana stranica* $a^\star$ *i visina* $h^\star$ *te piramide?*

R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $\Delta V^\star \approx 0.699\,\mathrm{cm}^3, \delta V^\star \approx 0.032$;
(c) $\Delta a^\star \approx .036$ cm *(jedna decimala)*, $\Delta h^\star \approx .349$ cm *(cijeli broj)*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *O čemu ovisi pogreška interpolacijskog polinoma?*

(b) *Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama* $T_0 = (-2, 76)$, $T_1 = (1, 7)$, $T_2 = (2, -4)$, $T_3 = (3, -19)$, $T_4 = (4, -8)$. *Napišite ovaj polinom u Newtonovom i u Lagrangeovom obliku.*

R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $P_4(x) = 8 + 3x^2 - 5x^3 + x^4$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Kako se definira broj uvjetovanosti regularne kvadratne matrice? Kako ovisi pogreška rješenja sustava linearnih jednadzbi* $Ax = b$ *o pogrešci u vektoru slobodnih koeficijenata?*

(b) *Odredite rješenje* $x^\star$ *sustava linearnih jednadžbi* $Ax = b$, *gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(c) *Kako će se promijeniti rješenje sustava ako vektor slobodnih koeficijenata postane* $\tilde{b} = b + (.1, .1, .1)^T$? *Koristite* l_∞ *normu.*

R: (a) Nastavni materijali; *(b)* $x^\star = (-1, 1, -1)^T$;
(c) $\|\tilde{x} - x^\star\|/\|x^\star\| \leq \|A^{-1}\|\|A\|\|\tilde{b} - b\|/\|b\| = 15.6 \cdot \frac{1}{4} = .39$ *za* $\|\cdot\|_\infty$.

Zadatak 4. [25 bodova]

(a) *Kako se u matričnom obliku može zapisati Gauss-Seidelova metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi* $Ax = b$?

(b) *Koji uvjet mora ispunjavati matrica* A *da bi Gauss-Seidelov iterativni postupak konvergirao prema rješenju sustava?*

(c) *Može li se sustav $Ax = b$, gdje je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = (2,6)^T$, riješiti Gauss-Seidelovom metodom? Ako može, odredite prve četiri iteracije počevši od $x^0 = (0,0)^T$.*

R: (a), (b) Nastavni materijali;
(c) $x^\star = (0,2)^T$, $x^k \in \{(1, 1.667)^T, (.1667, 1.94)^T, (.028, 1.99)^T, (.0046, 1.998)^T\}$

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Opišite metodu bisekcije za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$ i procijenite pogrešku n-te aproksimacije. Kakva je brzina konvergencije ove metode?*

(b) *Lokalizirajte interval u kome se nalazi pozitivni korijen jednadžbe $-x^3 + 3x = 0$ te odredite prvih pet iteracija metodom bisekcije. Kakvu ste točnost aproksimacije na taj način postigli?*

R: (a) Nastavni materijali; (b) $I = [1,2]$; $x_k \in \{1.5, 1.75, 1.625, 1.6875, 1.71875\}$; $|\xi - x_4| \le \frac{1}{2^5}(b-a) = .03$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.