Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
4. lipnja 2019.

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Zadana je funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 1$. *Odredite interval* $[a, b]$ *u kome se nalazi najmanja realna nultočka funkcije* f *i na kome su ispunjeni uvjeti teorema o konvergenciji Newtonove metode?*

(b) *U skladu s dobivenim rezultatima pod (a) odredite početnu aproksimaciju i sljedeće dvije aproksimacije.*

(c) *Kako se može procijeniti pogreška aproksimacije? Kolike su pogreške kod prve i druge aproksimacije?*

R: (a) $[-1, 0]$; *(b)* $x_0 = -1,\ x_1 = -.54,\ x_2 = -.34$;
(c) $\Delta x_n = |\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$: $\Delta x_1 = 0.74$; $\Delta x_2 = 0.14$

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Skicirajte grafove implicitno zadanih funkcija:* $f_1(x, y) \equiv -x^2 + y + 1 = 0$, $f_2(x, y) \equiv x + y^2 - 3 = 0$. *Koliko nultočaka ima sustav jednadžbi:* $f_1(x, y) = 0,\ f_2(x, y) = 0$?

(b) *Napišite opći Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi.*

(c) *Za izabranu početnu aproksimaciju* $a^0 = (2, 2)^T$ *sustava pod (a) izračunajte sljedeće dvije aproksimacije?*

R: (a) Ima dvije nultočke; (b) Nastavni materijali;
(c) $a^0 = (2, 2)^T,\ a^1 = (1.59, 1.35)^T,\ a^2 = (1.50, 1.23)^T$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Neka je* $L(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \subset C[a, b]$ *potprostor u* $C[a, b]$ *razapet linearno nezavisnim funkcijama* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. *Kako se definira najbolja* L_2 *aproksimacija funkcije* $f \in C[a, b]$ *na potprostoru* L?

(b) *Odredite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ako } x < 0 \\ 2|x|, & \text{ako } x \geq 0 \end{cases}$ *na potprostoru svih polinoma stupnja* ≤ 1 *(uz* $w(x) = 1$*).*

(c) *Neka je* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *skalarni produkt definiran na* $C[-1, 1]$ *uz* $w(x) = 1$. *Primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije ortogonalizirajte sustav funkcija* $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2$.

R: (a) Nastavni materijali; (b) $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$, $y = (3/2, 1/3)^T$, $f^\star(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x$;
(c) $\psi_0(x) = 1,\ \psi_1(x) = x,\ \psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Što znači da je sustav trigonometrijskih funkcija* $\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ *ortogonalan na* $C[-\pi, \pi]$ *?*

(b) *Za funkciju* $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & ako\ x < 0 \\ 1, & ako\ t_1 \geq 0 \end{cases}$ *odredite Fourierove koeficijente i Fourierov polinom stupnja* $n \geq 1$.

R: (a) Nastavni materijali; (b) $F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Definirajte problem najmanjih kvadrata za podatke* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, $m \geq 2$ *i model-funkciju* $x \mapsto f(x; a)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

(b) *Odredite parametre model-funkcije* $f(x; a, b) = a + bx^2$ *koja u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže točkama* $T_1 = (-1, 1.5)$, $T_2 = (0, 2)$, $T_3 = (1, 2)$, $T_4 = (2, 1)$. *U koordinatni sustav unesite točke i skicirajte graf dobivene model-funkcije.*

R: (a) Nastavni materijali; (b) $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Za funkciju* $f \in C^2[a, b]$ *napišite generaliziranu trapeznu formulu za* $h = \frac{b-a}{n}$ *i odgovarajuću ocjenu pogreške.*

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f(x) = \begin{cases} 0.5x^2 + 1, & ako\ x \leq 1 \\ (x-2)^2 + 0.5, & ako\ x > 1 \end{cases}$ *i trapeznom formulom izračunajte približnu vrijednost* $I^\star$ *integrala* $I = \int\limits_{-1}^{3} f(x)dx$ *uz* $n = 4$.

(c) *Ako znate da je prava vrijednost integrala* $I = 4$, *kolika je apsolutna pogreška aproksimacije, a kolika je ocjena pogreške?*

R: (a) $I^\star = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$, $\Delta I^\star =\leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2$, $M_2 := \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$;
(b) $I^\star = 4.5$; *(c)* $\Delta I^\star = 0.5$, $\Delta I^\star \leq \frac{2}{3}$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 135 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste iz prvog kolokvija.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
4. lipnja 2019.

2. kolokvij iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Zadana je funkcija* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x - 1$. *Odredite interval* $[a,b]$ *u kome se nalazi najveća realna nultočka funkcije* f *i na kome su ispunjeni uvjeti teorema o konvergenciji Newtonove metode?*

(b) *U skladu s dobivenim rezultatima pod (a) odredite početnu aproksimaciju i sljedeće dvije aproksimacije.*

(c) *Kako se može procijeniti pogreška aproksimacije? Kolike su pogreške kod prve i druge aproksimacije?*

R: (a) $[1.5, 2]$; *(b)* $x_0 = 2,\ x_1 = 1.67,\ x_2 = 1.55$;
(c) $\Delta x_n = |\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$: $\Delta x_1 = .18$; $\Delta x_2 = .02$

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Skicirajte grafove implicitno zadanih funkcija:* $f_1(x,y) \equiv y^2 - x^2 - 1/2 = 0$, $f_2(x,y) \equiv 2x + y^2 - 1 = 0$. *Koliko nultočaka ima sustav jednadžbi:* $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$?

(b) *Napišite opći Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi.*

(c) *Za izabranu početnu aproksimaciju* $a^0 = (1,1)^T$ *sustava pod (a) izračunajte sljedeće dvije aproksimacije?*

R: (a) Ima četiri nultočke; (b) Nastavni materijali;
(c) $a^0 = (1,1)^T,\ a^1 = (0.375, 0.625)^T,\ a^2 = (0.23, 0.74)^T$

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Neka je* $L(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \subset C[a,b]$ *potprostor u* $C[a,b]$ *razapet linearno nezavisnim funkcijama* $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$. *Kako se definira najbolja* L_2 *aproksimacija funkcije* $f \in C[a,b]$ *na potprostoru* L?

(b) *Neka je* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *skalarni produkt definiran na* $C[0,1]$ *uz* $w(x) = 1$. *Primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije ortogonalizirajte sustav funkcija* $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1$.

(c) *Korištenjem ovog ortogonalnog sustava odredite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x, & \text{ako } x < \frac{3}{4} \\ -4x + 4, & \text{ako } x \ge \frac{3}{4} \end{cases}$ *na potprostoru svih polinoma stupnja* ≤ 1.

R: (a) Nastavni materijali; (b) $\psi_0(x) = 1,\ \psi_1(x) = x - \frac{1}{2}$; *(c)* $f^\star(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$.

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Koji Fourierovi koeficijenti iščezavaju za parnu, a koji za neparnu funkciju?*

(b) *Za funkciju* $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako } x < 0 \\ 0, & \textit{ako } x \geq 0 \end{cases}$ *odredite Fourierove koeficijente i Fourierov polinom stupnja* $n \geq 1$.

R: (a) Nastavni materijali; (b) $F_n(x) = \frac{1}{2} - \sum\limits_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) *Kako se može zapisati vektor reziduala* $\mathbf{r}$ *kod linearnog problema najmanjih kvadrata?*

(b) *Odredite parametre model-funkcije* $f(x;a,b) = ax + bx^2$ *koja u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže točkama* $T_1 = (-1,2)$, $T_2 = (0,0.5)$, $T_3 = (1,0.5)$, $T_4 = (2,2)$. *U koordinatni sustav unesite točke i skicirajte graf dobivene model-funkcije.*

R: (a) Nastavni materijali; (b) $f(x) = -0.886x + 0.977x^2$

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Za funkciju* $f \in C^2[a,b]$ *napišite generaliziranu trapeznu formulu za* $h = \frac{b-a}{n}$ *i odgovarajuću ocjenu pogreške.*

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f(x) = \begin{cases} -0.5x^2 + 1, & \textit{ako } x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 1.5, & \textit{ako } x > 1 \end{cases}$ *i trapeznom formulom izračunajte približnu vrijednost* $I^\star$ *integrala* $I = \int\limits_{-1}^{3} f(x)dx$ *uz* $n = 4$.

(c) *Na koliko bi dijelova trebalo razdijeliti interval integracije* $[-1,3]$ *da bi se postigla točnost na jednu decimalu?*

R: (a) $I^\star = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$, $\Delta I^\star =\leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2$, $M_2 := \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$;
(b) $I^\star = 3.5$; *(c) za* $\epsilon = .05$, $n > (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{\epsilon} \cdot \frac{b-a}{12}}$, *tj.* $n = 15$.

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 135 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste iz prvog kolokvija.