1. Inverzija

1.1. Definicija inverzije

Kod rješavanja geometrijskih problema od posebne važnosti je transformacija ravnine koja je nazvana inverzija. Inverzija je preslikavanje ravnine koje skup pravaca i kružnica preslikava u taj isti skup, a pri tome pravac može preslikati ili u pravac ili u kružnicu te također kružnicu može preslikati ili u pravac ili u kružnicu.

Definicija 1.1 *Neka je M ravnina, $O \in M$ čvrsta točka, $R \in \mathbb{R}^+$ i $T \neq O$ bilo koja točka ravnine M. Preslikavanje ravnine $I_O\colon M \backslash \{O\} \to M \backslash \{O\}$ koje točki T pridružuje točku T', $T \to T' = I_O(T)$, zove se* **inverzija** *s centrom O i radijusom R ako vrijedi*

1) *O, T, T' su kolinearne točke*

2) *T i T' leže s iste strane točke O*

3) $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.

Točka O zove se **centar (središte) inverzije**, R^2 **konstanta (koeficijent) inverzije**.

Kružnica sa središtem u O i polumjera R naziva se **kružnica inverzije**.

Inverzija je **involutorna** transformacija ravnine, tj.$I_O \circ I_O = id$. To svojstvo inverzije slijedi iz definicije inverzije.

Može se pokazati da je inverzija **bijektivno** preslikavanje.

Svaka točka kružnice inverzije preslikava se sama na sebe. Dakle, svaka točka kružnice inverzije je **fiksna** točka i to su jedine njezine fiksne točke. Naime, ako točka T leži na kružnici inverzije onda je $|OT| = R$, pa prema svojstvu $|OT| \cdot |OT'| = R^2$ mora vrijediti da je $|OT'| = R$. Kako točke T i T' leže s iste strane točke O slijedi da je $T = T'$.

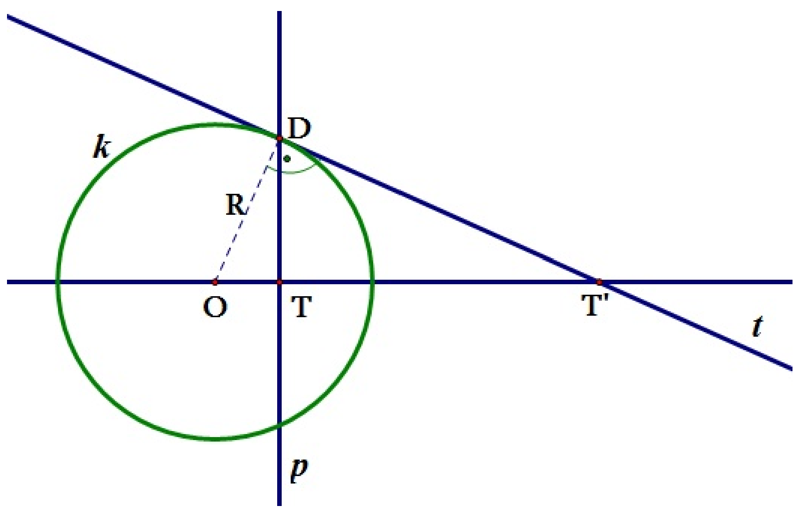
Na osnovu definicije inverzije lako se uočava da je inverzija jednoznačno određena kružnicom inverzije, odnosno kružnicom $k(O, R)$ kojoj je središte u centru inverzije O.

1.1.1. Konstrukcija inverzne slike točke

U ovom dijelu razmatrat ćemo konstrukciju inverzne slike zadane točkom pri inverziji koja je zadana kružnicom inverzije $k(O, R)$.

1^0 Neka se točka $T \in M \backslash \{O\}$ nalazi unutar kružnice $k(O, R)$. Treba konstruirati inverznu sliku T' točke T, tj. točku $T' = I_O(T)$.

Konstruira se okomica p u točki T na pravac OT. Neka je točka D jedno od sjecišta okomice p i kružnice $k(O, R)$. U točki D konstruira se tangenta t na kružnicu $k(O, R)$. Tražena točka T' je presjek tangente t i pravca OT (Slika 1.1). Dokažimo da dobivena točka zadovoljava tražene uvjete.



Slika 1.1 *Konstrukcija inverzne slike točke koja se nalazi unutar kružnice inverzije*

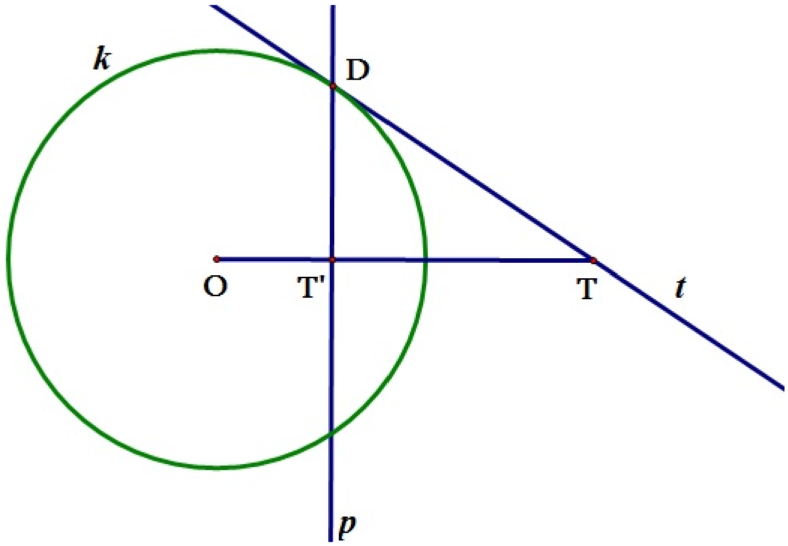
Kako je $\angle OTD = \angle ODT' = 90°$ i $\angle TOD = \angle DOT'$ slijedi da se trokuti $\triangle OTD$ i $\triangle ODT'$ podudaraju u sva tri kuta, pa imamo $\triangle OTD \sim \triangle ODT'$, odakle slijedi:

$$\frac{|OT'|}{R} = \frac{R}{|OT|} \Rightarrow |OT| \cdot |OT'| = R^2$$

■

2^0 Neka je točka $T \in M \backslash \{O\}$ izvan kružnice inverzije.

Konstruira se tangenta t iz točke T na kružnicu inverzije $k(O, R)$. Neka je točka D diralište tangente t i kružnice $k(O, R)$. Konstruira se okomica p u točki D na pravac OT. Inverzna slika T' točke T je sjecište okomice p i pravca OT (Slika 1.2). Dokaz valjanosti konstrukcije je analogan dokazu valjanosti konstrukcije inverzne slike točke unutar kružnice inverzije.



Slika 1.2 *Konstrukcija inverzne slike točke koja se nalazi izvan kružnice inverzije*

Ako se dana točka T, koja se inverzijom preslikava u točku T', nalazi unutar kružnice inverzije $k(O, R)$ onda vrijedi $|OT| < R$. Prema tome iz $|OT| \cdot |OT'| = R^2$ slijedi da je $|OT'| > R$. Obratno, ako se dana točka nalazi van kružnice inverzije onda vrijedi $|OT| > R$, odnosno vrijedi da je $|OT'| < R$. Prema tome, svaka točka unutar kružnice inverzije preslika se u točku izvan kružnice inverzije i obrnuto.

1.2. Svojstva inverzije

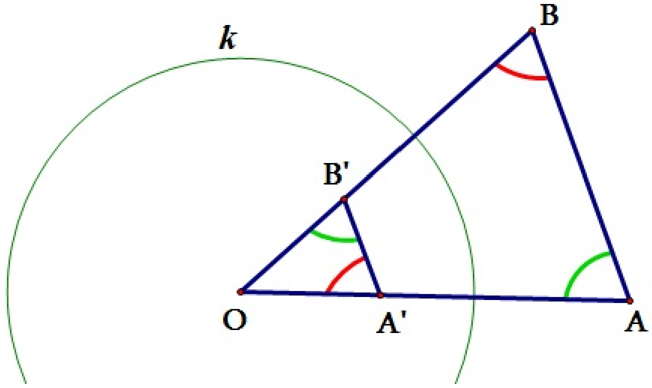
U ovom dijelu proučavat ćemo značajna svojstva inverzije. Razmotrit ćemo također slučajeve kada inverzija preslikava pravac u pravac, kada pravac u kružnicu, te kada kružnicu preslikava u pravac i kada kružnicu preslikava u kružnicu. Navest ćemo neka specifična preslikavanja inverzijom.

Teorem 1.1 *Neka je $p \subset M$ pravac kroz centar O inverzije I_O, tada je $I_O(p \backslash \{O\}) = p \backslash \{O\}$.*

Dokaz. Dokaz je neposredna posljedica činjenice da O, T i T' moraju biti kolinearne točke i da je I_O bijekcija. ■

Teorem 1.2 *Neka su A, A' i B, B' parovi pridruženih točaka inverzije I_O s kružnicom inverzije $k(O, R)$. Tada vrijedi*

$$\angle OAB = \angle OB'A' \qquad i \qquad \angle OBA = \angle OA'B'$$



Slika 1.3

Dokaz. Kako su A i A' pridružene točke pri inverziji I_O to vrijedi $|OA| \cdot |OA'| = R^2$ (Slika 1.3). Analogno vrijedi $|OB| \cdot |OB'| = R^2$, pa je

$$|OA| : |OB| = |OB'| : |OA'| \Rightarrow |OA| : |OB'| = |OB| : |OA'|.$$

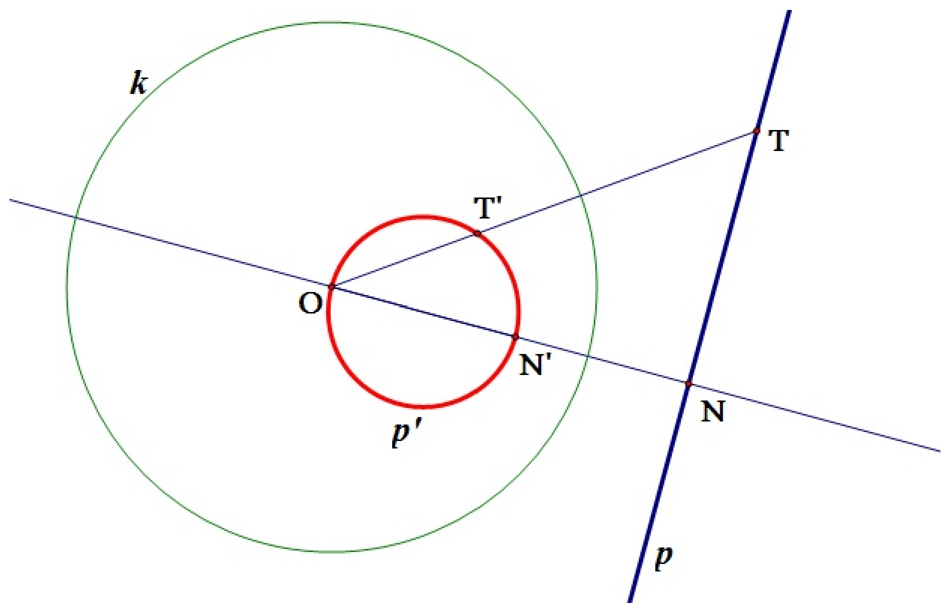
Kako je $\angle AOB = \angle B'OA'$ to slijedi $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, odakle dobivamo $\angle OAB = \angle OB'A'$ i $\angle OBA = \angle OA'B'$. ■

Neposredna posljedica teorema je sljedeća tvrdnja.

Korolar 1.1 *Inverzija je određena s centrom inverzije i parom pridruženih točaka.*

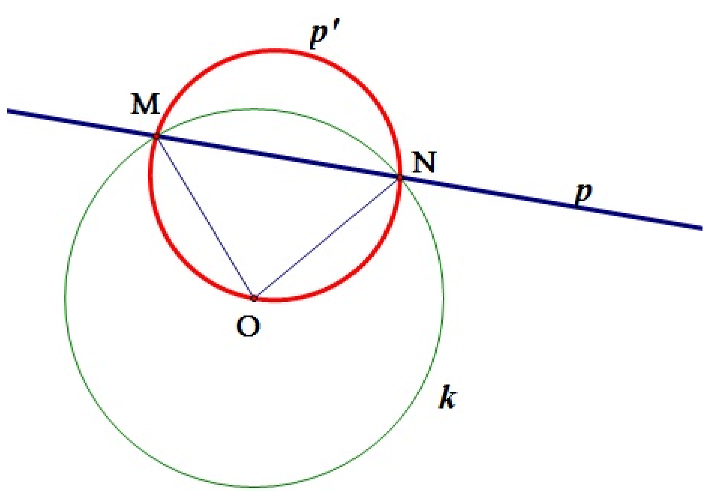
Teorem 1.3 *Pravac p koji ne prolazi centrom O inverzije I_O preslikava se u kružnicu koja prolazi centrom O te inverzije.*

Dokaz. Neka je $p \subset M \backslash \{O\}$ neki pravac (Slika 1.4). Neka je N nožište okomice spuštene iz O na p, a $N' = I_O(N)$. Neka je $T \in p$ bilo koja točka pravca p, a $T' = I_O(T)$. Prema *Teoremu 1.2* je $\angle ONT = \angle OT'N' = 90°$. Iz toga, prema obratu Talesovog poučka, slijedi da se T' nalazi na kružnici p' kojoj je $\overline{ON'}$ dijametar. Dakle, svaka točka pravca p preslikava se u točku kružnice p'. Budući je I_O bijekcija, tvrdnja neposredno slijedi. ■

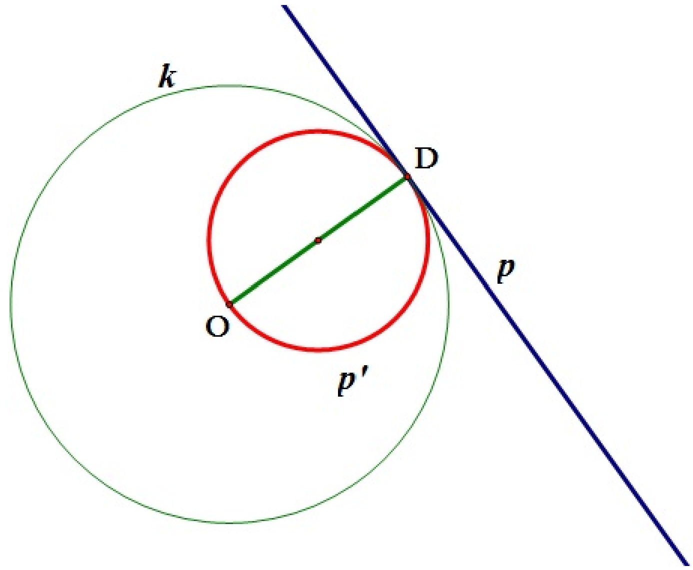


Slika 1.4 *Slika pravca koji ne prolazi centrom inverzije je kružnica*

Primjedba 1.1 *Ako pravac p siječe kružnicu inverzije u točkama M i N, onda je kružnica p' određena s nekolinearnim točkama O, M i N (Slika 1.5), a ako pravac p dira kružnicu inverzije u točki D onda je p' kružnica s promjerom $\overline{OD}$ (Slika 1.6).*



Slika 1.5 *Slika pravca koji ne prolazi centrom inverzije i siječe kružnicu inverzije*



Slika 1.6 *Slika pravca koji ne prolazi centrom inverzije i dira kružnicu inverzije*

Za dokaz sljedećeg svojstva inverzije potrebno je uvesti pojam potencije točke s obzirom na kružnicu. Najprije dokažimo sljedeći teorem.

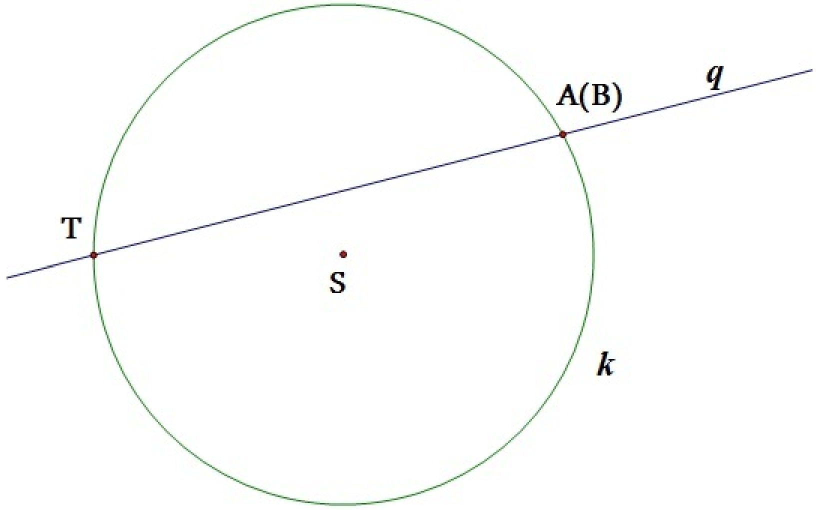
Teorem 1.4 *Neka je $k(S,r)$ kružnica, T bilo koja točka ravnine i q bilo koji pravac koji prolazi kroz T i siječe kružnicu $k(S,r)$ u točkama A i B. Produkt*

$$p = |TA| \cdot |TB|$$

ne ovisi o izboru pravca q kroz T i nazivamo ga **potencijom** p **točke** T **s obzirom na kružnicu** k.

Dokaz. 1^0 Neka T leži na kružnici $k(S,r)$ (Slika 1.7). Tada je $T = A$ ili $T = B$. Ako je $T = A$ onda je $|TA| = 0$, a ako je $T = B$ onda je $|TB| = 0$. Iz toga slijedi da je

$$|TA| \cdot |TB| = 0.$$



Slika 1.7.

2^0 Neka T leži unutar kružnice $k(S,r)$. Neka su q_1 i q_2 pravci koji prolaze točkom T, te neka je $q_1 \cap k = \{A, B\}$ i $q_2 \cap k = \{C, D\}$ (Slika 1.8). Budući su obodni kutovi nad istim lukom jednaki slijedi

$$\angle CAB = \angle CDB,$$

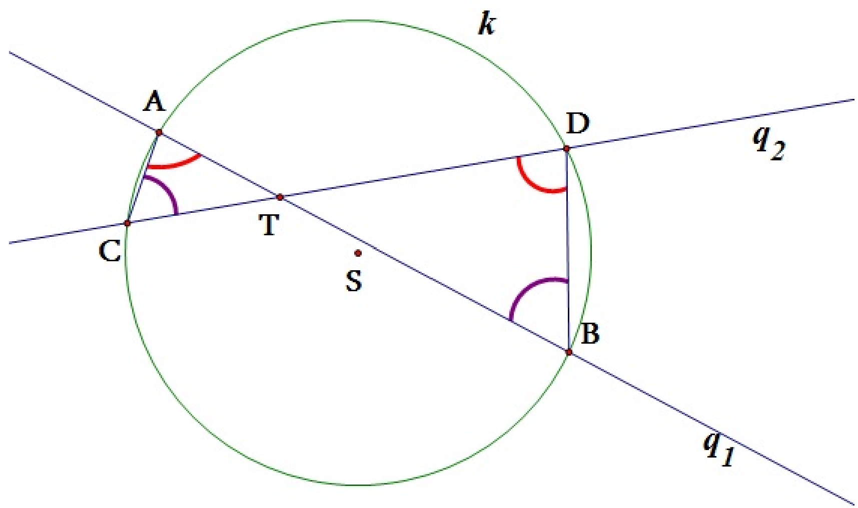
$$\angle DCA = \angle DBA.$$

Iz tog slijedi da su trokuti TAC i TDB slični, pa vrijedi

$$\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|},$$

pa je

$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|.$$



Slika 1.8.

3^0 Neka T leži izvan kružnice $k(S,r)$. Neka je točka C dіralište tangente iz točke T na kružnicu $k(S,r)$ i neka je točka N nožište visine trokuta ABS iz vrha S (Slika 1.9). Trokuti NSA i NSB imaju zajedničku stranicu $\overline{NS}$, $|AS|=|BS|=r$ i $\angle SNA=\angle SNB$, pa vrijedi $\triangle NSA \cong \triangle NSB$, odakle slijedi

$$|NA|=|NB|. \tag{1}$$

Kako je trokut ABS jednakokračan to je točka N polovište stranice $\overline{AB}$ i vrijedi

$$|TA|=|TN|-|NA|, \tag{2}$$

$$|TB|=|TN|+|NB|. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) slijedi da je

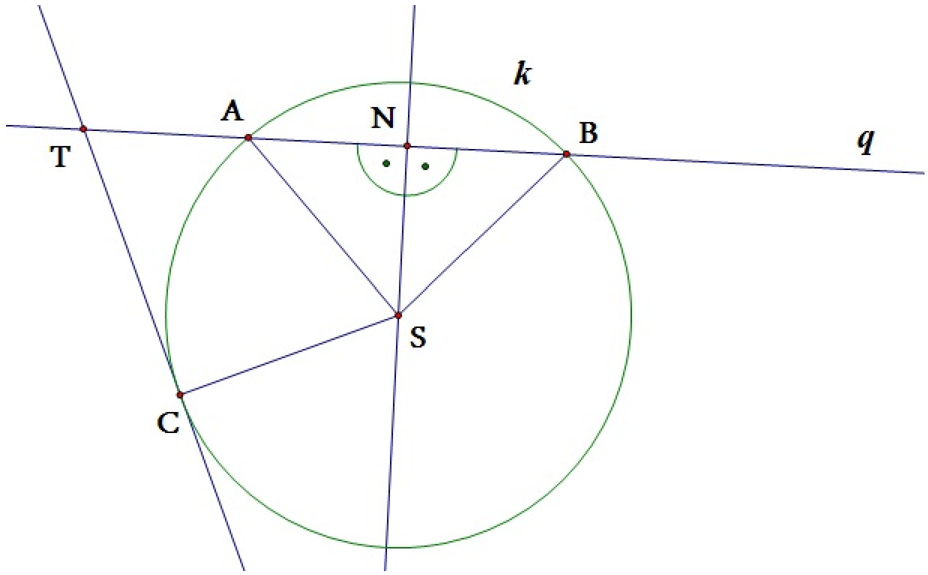
$$|TA|\cdot|TB|=|TN|^2-|NA|^2. \tag{4}$$

Iz pravokutnog trokuta ASN slijedi

$$|NA|^2=|SA|^2-|NS|^2 \tag{5}$$

Prema (4), (5) i činjenice da je $|SC|$ polumjer kružnice vrijedi

$$|TA|\cdot|TB|=|TN|^2+|NS|^2-|SA|^2=|TS|^2-|SA|^2=|TS|^2-|SC|^2=|TC|^2.$$



Slika 1.9.

Iz trećeg dijela prethodnog dokaza neposredno slijedi teorem.

Teorem 1.5 *Potencija točke T koja leži izvan kružnice k s obzirom na kružnicu k jednaka je kvadratu udaljenosti točke T i dirališta tangente iz te točke i kružnice k.*

Dokažimo sada sljedeću tvrdnju.

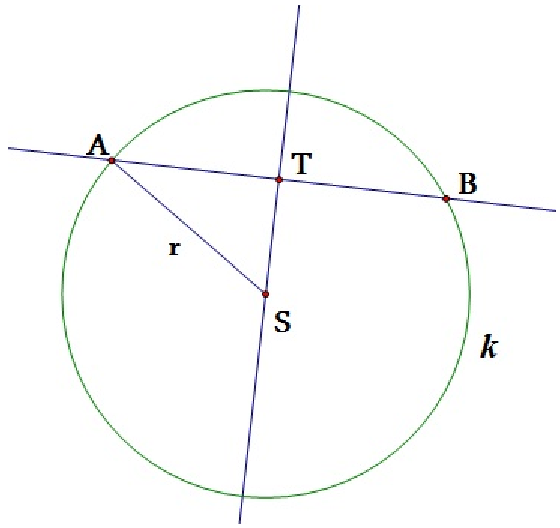
Teorem 1.6 *Potencija točke T koja leži unutar kružnice k s obzirom na kružnicu k jednaka je razlici kvadrata radijusa promatrane kružnice i kvadrata udaljenosti točke T do središta kružnice.*

Dokaz. Kada promatrana točka T leži unutar kružnice k, povuče se tetiva $\overline{AB}$ točkom T koja je okomita na pravac na kojem leži promjer koji prolazi kroz T (Slika 1.10). Očito vrijedi

$$|TA| \cdot |TB| = |TA|^2 = r^2 - |TS|^2.$$

■

Promotrimo sada sliku kružnice pri zadanoj inverziji.



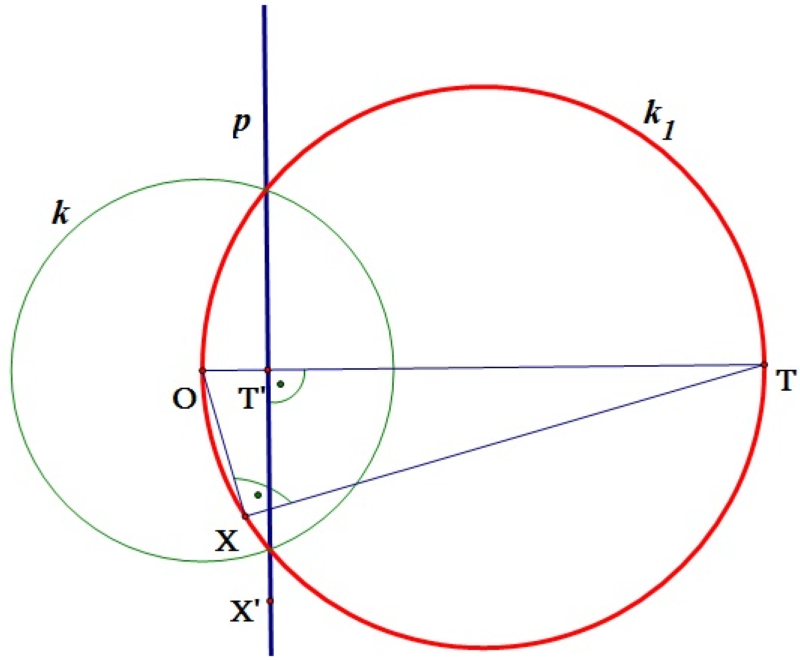
Slika 1.10 *Potencija točke koja leži unutar kružnice obzirom na kružnicu*

Teorem 1.7 *Neka je k_1 kružnica u ravnini M.*

1. *Ako k_1 prolazi centrom O inverzije I_O, onda je slika kružnice k_1 pravac p koji ne prolazi centrom O.*

2. *Ako k_1 ne prolazi centrom O, onda je slika kružnice k_1 kružnica k_1' koja ne prolazi kroz O.*

Dokaz. *1.* Neka je k_1 kružnica koja prolazi kroz O i $\overline{OT}$ njen dijametar (Slika 1.11). Neka je $X \in k_1$ bilo koja točka i $X' = I_O(X)$, a $T' = I_O(T)$. Neka je p pravac koji prolazi kroz T' i $p \perp OT$. Tvrdimo da je $p = I_O(k_1)$.
Prema Talesovom poučku je $\angle OXT = 90°$, a prema *Teoremu 1.2* slijedi da je $\angle OT'X' = 90°$, pa je $X' \in p$. Kako to vrijedi za svaku točku $X \in k_1$ slijedi da je $I_O(k_1) \subseteq p$. Budući je I_O bijekcija, slijedi da je $I_O(k_1) = p$. ∎



Slika 1.11 *Slika kružnice koja prolazi centrom inverzije je pravac*

2. Neka je k_1 kružnica koja ne prolazi kroz O i neka je $T \in k$, a $T' = I_O(T)$ (Slika 1.12). Ako koeficijent inverzije označimo sa R^2 onda je

$$|OT| \cdot |OT'| = R^2. \tag{6}$$

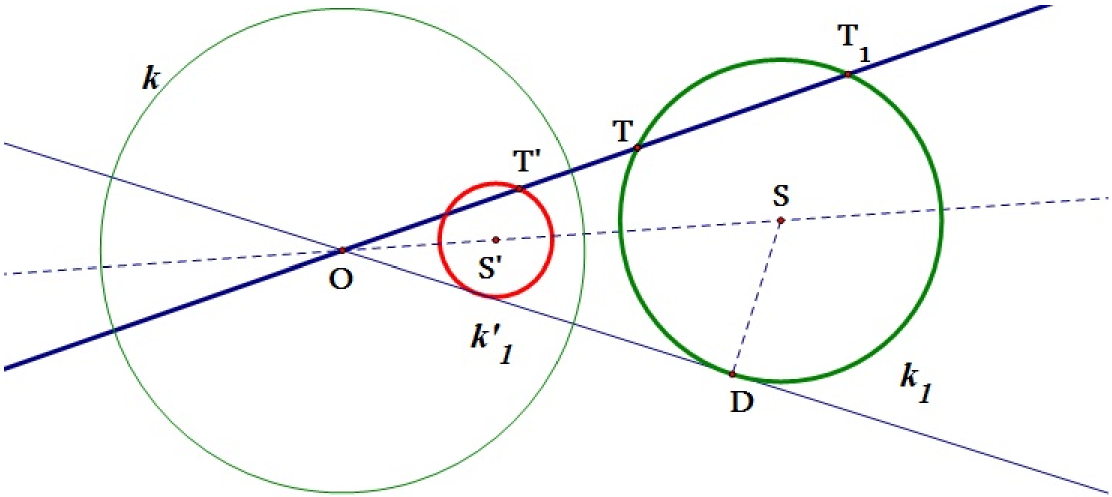
Neka je $T_1 = OT \cap k_1$ drugo sjecište pravca OT i kružnice k_1. Prema *Teoremu 1.5* vrijedi da je

$$|OT| \cdot |OT_1| = |OD|^2 \tag{7}$$

pri čemu je točka D dualište tangente iz točke O na kružnicu k_1. Iz (6) i (7) slijedi

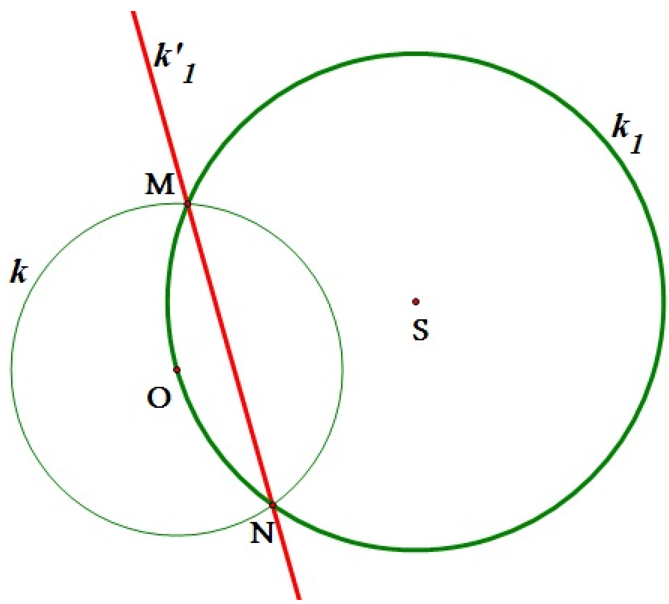
$$|OT'| = \frac{R^2}{|OT|} = \frac{R^2}{|OD|^2}|OT_1| = \left(\frac{R}{|OD|}\right)^2 \cdot |OT_1|.$$

Dakle, T' je slika točke T_1 pri homotetiji $h = h(O, (\frac{R}{|OD|})^2)$. Kako je homotetična slika kružnice opet kružnica, slijedi tvrdnja. ∎



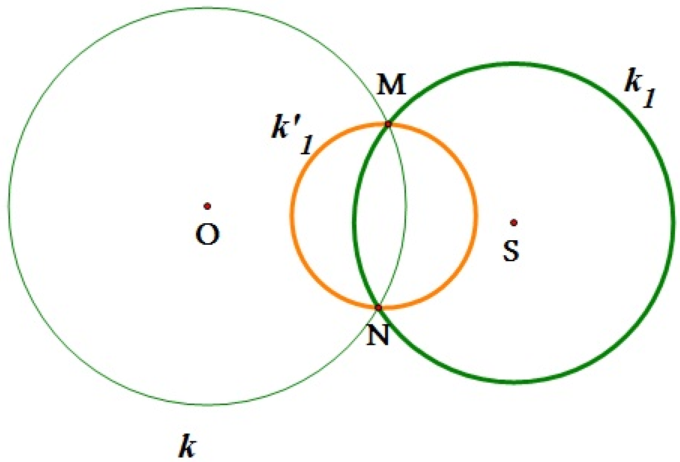
Slika 1.12 *Slika kružnice koja ne prolazi centrom inverzije je kružnica*

Primjedba 1.2 *Ako kružnica k_1 siječe kružnicu inverzije u točkama M i N i prolazi centrom O, tada je pravac MN slika kružnice k_1 (Slika 1.13).*

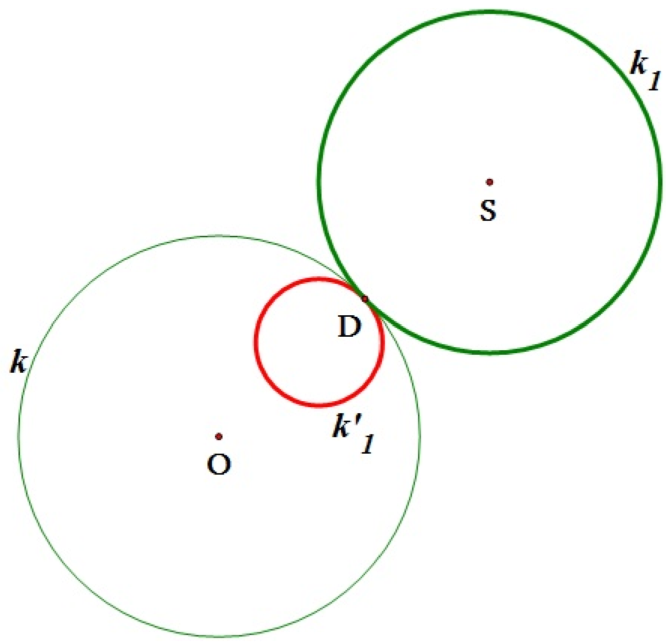


Slika 1.13 *Slika kružnice koja prolazi centrom inverzije i siječe kružnicu inverzije*

Primjedba 1.3 *Ako kružnica k_1 siječe kružnicu inverzije u točkama M i N i ne prolazi centrom O, tada tim točkama prolazi i slika kružnice k_1' (Slika 1.14), a ako se kružnica k_1 dodiruje sa kružnicom inverzije u točki D onda se ona u toj točki dodiruje i sa kružnicom k_1' (Slika 1.15).*



Slika 1.14 *Slika kružnice koja ne prolazi centrom inverzije i siječe kružnicu inverzije*



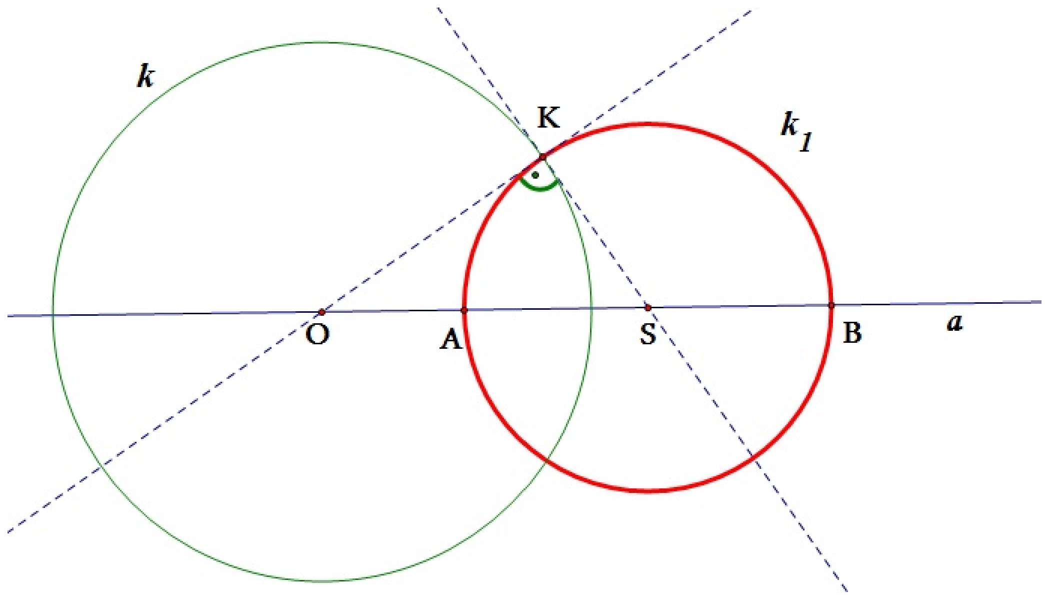
Slika 1.15 *Slika kružnice koja ne prolazi centrom inverzije i dira kružnicu inverzije*

Teorem 1.8 *Kružnica k_1 koja kružnicu inverzije siječe okomito preslikava se inverzijom sama na sebe, odnosno $I_O(k_1) = k_1$.*

Dokaz. Neka je kružnica k_1 zadana tako da siječe kružnicu inverzije k okomito (Slika 1.16). Neka je K jedno od sjecišta tih dviju kružnica. Pravac OK je tada tangenta kružnice k_1 u točki K. Neka je a pravac koji prolazi središtem inverzije O i siječe kružnicu k_1 u točkama A i B. Tada je potencija centra O s obzirom na kružnicu k_1

$$|OA| \cdot |OB| = |OK|^2.$$

Budući je $|OK|$ upravo duljina polumjera kružnice inverzije slijedi da su točke A i B pridružene točke u inverziji I_O, čime je dokazan teorem. ■



Slika 1.16 *Kružnica koja okomito siječe kružnicu inverzije preslikava se sama na sebe*

Teorem 1.9 *Neka su $A, B \neq O$ i I_O inverzija s centrom O i koeficijentom inverzije R. Tada vrijedi*

$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{R^2}{|OA| \cdot |OB|}$$

Dokaz. Iz *Teorema 1.2* slijedi da je $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$, pa je

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|OB|}.$$

Kako je $|OA'| = \dfrac{R^2}{|OA|}$, uvrštavanjem slijedi

$$|A'B'| = |AB| \cdot \frac{R^2}{|OA| \cdot |OB|}.$$

■