Kolokvij 1 - A

26. travnja 2018.

Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima.
Kolokvij nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
Sve tvrdnje je potrebno obrazložiti i precizno iskazati te, ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vježbama i/ili predavanjima, navesti na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (20). Neka je $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, tj. skup svih kvadratnih matrica reda 2 nad $\mathbb{R}$. Definiramo operaciju zbrajanja na način da je

$$A \boxplus B = \mathbf{0}, \quad \forall A, B \in V,$$

a operacija množenja skalarom je uobičajeno definirano množenje matrica skalarom. Skup V s ovako definiranim operacijama nije vektorski prostor. Provjerite koja svojstva iz definicije vektorskog prostora vrijede, a koja ne vrijede.
(*Sve tvrdnje koje koristite obrazložite!*)

Zadatak 2 (10+20). Neka je $p \in \mathcal{P}_3$, $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$. Definirani su skupovi

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3 \colon a_3 = a_0\}$$
$$L = \{p \in \mathcal{P}_3 \colon p(1) = 0\}$$

a) Pokažite da su M i L potprostori vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$.

b) Odredite jednu bazu za $M + L$ i $M \cap L$ te njihove dimenzije.

Zadatak 3 (10+10). Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i potprostor K vektorskog prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$K = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon XA = X \quad \text{i} \quad \text{tr}(X) = 0\}$$

a) Odredite bazu potprostora K.

b) Odredite bazu i dimenziju nekog direktnog komplementa od K u $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Zadatak 4 (10+15+5). Zadano je preslikavanje $L \colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ formulom

$$L(A) = (a_{11} + a_{22})t^3 + (a_{12} + a_{21})t^2 + (a_{11} + a_{12})t + a_{21} - a_{22}$$

pri čemu su a_{ij}, $i, j \in \{1, 2\}$ uobičajene oznake za elemente kvadratne matrice A reda 2.

a) Pokažite da je preslikavanje L linearan operator. (*Sve tvrdnje koje koristite obrazložite!*)

b) Odredite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora te rang i defekt operatora. Je li operator L monomorfizam? Je li operator L izomorfizam? Obrazložite!

c) Odredite matricu pridruženu operatoru L u paru kanonskih baza (e, f).