Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima.
Kolokvij nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
Sve tvrdnje je potrebno obrazložiti i precizno iskazati te, ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vježbama i/ili predavanjima, navesti na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (20). Neka je $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, tj. skup svih kvadratnih matrica reda 2 nad $\mathbb{R}$. Definiramo operaciju množenja skalarom na način da je

$$\alpha \boxdot B = \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall B \in V$$

a operacija zbrajanja je uobičajeno definirano zbrajanje matrica.
Skup V s ovako definiranim operacijama nije vektorski prostor. Provjerite koja svojstva iz definicije vektorskog prostora vrijede, a koja ne vrijede.
(*Sve tvrdnje koje koristite obrazložite!*)

Zadatak 2 (10+20). Neka je $p \in \mathcal{P}_3$, $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$. Definirani su skupovi

$$K = \{p \in \mathcal{P}_3 \colon a_2 = a_1\},$$
$$N = \{p \in \mathcal{P}_3 \colon p(-1) = 0\}$$

a) Pokažite da su K i N potprostori vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$.

b) Odredite jednu bazu za $K + N$ i $K \cap N$ te njihove dimenzije.

Zadatak 3 (10+10). Zadana je matrica $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i potprostor L vektorskog prostora $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$L = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon XB = X \quad \text{i} \quad \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

a) Odredite bazu potprostora M.

b) Odredite bazu i dimenziju nekog direktnog komplementa od L u $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Zadatak 4 (10+15+5). Zadano je preslikavanje $L \colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ formulom

$$L(A) = (a_{12} + a_{21})t^3 + (a_{11} + a_{22})t^2 + (a_{21} + a_{22})t + a_{11} - a_{12}$$

pri čemu su a_{ij}, $i, j \in \{1, 2\}$ uobičajene oznake za elemente kvadratne matrice A reda 2.

a) Pokažite da je preslikavanje L linearan operator. (*Sve tvrdnje koje koristite obrazložite!*)

b) Odredite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora te rang i defekt operatora. Je li operator L monomorfizam? Je li operator L izomorfizam? Obrazložite!

c) Odredite matricu pridruženu operatoru L u paru kanonskih baza (e, f).