Statistička analiza Pearsonovih difuzija s marginalnim distribucijama koje imaju teške repove

N. N. Leonenko
School of Mathematics
Cardiff University

N. Šuvak
Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku

Sažetak

Razmatrana problematika uključuje procjenu parametara i testiranje statističkih hipoteza u vjerojatnosnom modelu difuzije. Za definiranje samog modela ključna je stohastička diferencijalna jednadžba

$$dX_t = \mu(X_t, t)\, dt + \sigma(X_t, t)\, dB_t$$

čije rješenje je slučajan proces, tj. familija slučajnih varijabli $\{X_t,\, t \geq 0\}$ karakterizirana parametrom pomaka $\mu(\cdot, t)$ i parametrom difuzije $\sigma(\cdot, t)$ i gdje je $\{B_t,\, t \geq 0\}$ familija slučajnih varijabli s točno određenim svojstvima koja se zove Brownovo gibanje. Parametri pomaka i difuzije također ovise o jednom ili više realnih parametara i određuju bitna svojstva promatranog modela, kao što su marginalna distribucija (tj. distribucija slučajne varijable X_t) i autokorelacijska struktura difuzije.

Posebno zanimljivima pokazuju se difuzije čija su svojstva određena linearnim parametrom pomaka $\mu(x, t) = -\theta(x - \mu)$ i parametrom difuzije $\sigma(x, t) = \sqrt{2\theta a(b_2x^2 + b_1x + b_0)}$. Promatrana parametrizacija osigurava pripadnost marginalne distribucije difuzije familiji neprekidnih distribucija čije funkcije gustoća zadovoljavaju Pearsonovu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathfrak{p}'(x)}{\mathfrak{p}(x)} = \frac{a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0}, \quad a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

gdje $\mathfrak{p}(x)$ označava funkciju gustoće. Difuzije sa ovim svojstvom poznate su kao Pearsonove difuzije.

Predmet našeg istraživanja su Pearsonove difuzije čije marginalne distribucije imaju teške repove, tj. Pearsonove difuzije za koje repna funkcija distribucije $P(X > x)$ nije eksponencijalno ograničena. U tu klasu ubrajamo recipročnu gama, Studentovu i Fisher-Snedecorovu difuziju. U okvirima statističke analize ovih difuzija promatrali smo procjenu parametara metodom momenata, dokazali konzistentnost i asimptotsku normalnost dobivenih procjenitelja te konstruirali testove za testiranje hipoteza o marginalnoj distribuciji difuzije. Spomenute rezultate ne bi bilo moguće dobiti bez poznavanja prijelazne funkcije gustoće difuzije, tj. funkcije

$$p(x; x_0, t) = \frac{d}{dx} P(X_t \leq x \mid X_0 = x_0).$$

Međutim, prijelazne funkcije gustoća Pearsonovih difuzija s marginalnim distribucijama koje imaju teške repove nisu poznate u eksplicitnom obliku. Iz tog razloga koristimo njihove spektralne reprezentacije u terminima odgovarajućih hipergeometrijskih funkcija i ortogonalnih polinoma (Besselovih polinoma u slučaju recipročne gamma difuzije, polinoma Routh-Romanovskog u slučaju Studentove difuzije i Fisher-Snedecorovih polinoma u slučaju Fisher-Snedecorove difuzije). U ovom predavanju bit će detaljno objašnjen postupak spektralne reprezentacije prijelazne funkcije gustoće Fisher-Snedecorove difuzije te primjena dobivenog rezultata u statističkoj analizi tog procesa. Osim toga, bit će predstavljani analogni rezultati za recipročnu gama i Studentovu difuziju.

Literatura

[1] Bontemps, C., Meddahi, N. (2008). Testing distributional assumptions: A GMM approach. *J. Appl. Econometrics*, u recenzentsom postupku.

[2] Forman, J. L., Sørensen, M. (2008). The Pearson diffusions: A class of statistically tractable diffusion processes. *Scand. J. Statist.* **35**: 438–465.

[3] Kutoyants, Y. A., Yoshida, N. (2007). Moment estimation for ergodic diffusion processes. *Bernoulli* **13**: 933–951.

[4] Leonenko, N. N., Šuvak, N. (2009). Statistical inference for reciprocal gamma diffusion process. *J. Statist. Plann. Inference*, **140**: 30–51.

[5] Leonenko, N. N., Šuvak, N. (2009). Statistical inference for Student diffusion process. *Stoch. Anal. Appl.*, u recenzentsom postupku.

[6] Avram, F., Leonenko, N. N., Šuvak, N. (2009). Statistical analysis of Fisher-Snedecor diffusion. Working paper.

[7] Linetsky, V. (2004). The spectral decomposition of the option value. *Int. J. Theor. Appl. Finance* **7**: 337–384.

[8] Mendoza, R., Carr P., Linetsky, V. (2009). Time changed Markov processes in unified credit-equity modeling. *Math. Finance*, to appear.

[9] Schoutens, W. (2000). *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials.* Springer, New York, Heidelberg, Berlin.

[10] Wong, E. (1964). The construction of a class of stationary Markov processes. *Sixteen Symposium in Applied mathematics - Stochastic processes in mathematical Physics and Engineering, American Mathematical Society, Ed. R. Bellman* **16**: 264–276.