O nekim svojstvima faktorizacija kvazidefinitnih matrica

Ninoslav Truhar
Odjel za matematiku,
Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Trg Lj. Gaja 6 HR-31000, Osijek
ntruhar@mathos.hr

koautori:

Luka Grubišić, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu,
Krešimir Veselić, Lehrgebiet Mathematische Physik, Fernuniversität Hagen, Njemačka

Na predavanju ćemo prikazati neka svojstva J-unitarnih matrica koja imaju važnu ulogu pri faktorizaciji indefinitnih hermitskih matrica, odnosno kvazidefinitnih matrica.

Za matricu H reći ćemo da je kvazidefinitna ako postoji permutacijska matrica P takva da

$$H_{qd} \equiv P^T H P = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^* & -H_{22} \end{bmatrix},$$

pri čemu su H_{11} i $H_{22} + H_{12}^* H_{11}^{-1} H_{12}$ ili H_{22} i $H_{11} + H_{12} H_{22}^{-1} H_{12}^*$ pozitivno definitne matrice, redom.

Problem dekompozicije matrice H na svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore je ekvivalentan problemu istovremene dijagonalizacije para $(G_0^*(I+\Gamma)^*(I+\Gamma)G_0, J)$, gdje su

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{12}^* H_{11}^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad G_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^{1/2} & 0 \\ 0 & \left(H_{22} + H_{12}^* H_{11}^{-1} H_{12}\right)^{1/2} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

To znači da postoji regularna J-unitarna matrica $X = \begin{bmatrix} X_+ & X_- \end{bmatrix}$ takva da

$$\begin{bmatrix} X_+^* \\ X_-^* \end{bmatrix} G_0^*(I+\Gamma)^*(I+\Gamma)G_0 \begin{bmatrix} X_+ & X_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\Lambda_+| & 0 \\ 0 & |\Lambda_-| \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} X_+^* \\ X_-^* \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} X_+ & X_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

Glavni rezultat ove prezentacije jest gornja ograda za normu matrice $\|X\|$, koji glasi:

$$\|X\| \leq \frac{\Psi}{\eta} + \sqrt{1 + \left(\frac{\Psi}{\eta}\right)^2},$$

pri čemu su

$$\Psi = \min\{\|H_{12}^* H_{11}^{-1}\|, \|H_{12} H_{22}^{-1}\|\}, \qquad \eta = \min_{\lambda_i \in \Lambda_-, \widetilde{\lambda}_j \in \widetilde{\Lambda}_+} \frac{||\lambda_i| + |\widetilde{\lambda}_j||}{\sqrt{|\lambda_i|\,|\widetilde{\lambda}_j|}} \geq 2.$$