Proširenja nekih $D(-1)$-trojki u imaginarnim kvadratnim poljima

Sažetak

Neka je z element komutativnog prstena R. *Diofantova četvorka* sa svojstvom $D(z)$ ili $D(z)$-*četvorka* je skup D od četiri različita elementa iz R, različita od nule, sa svojstvom da je produkt bilo koja dva različita elementa uvećan za z kvadrat nekog elementa u R. Bilo koji skup D koji zadovoljava prethodno svojstvo zove se *skup sa svojstvom* $D(z)$.

Za $z = -1$ promatrali smo problem postojanja $D(-1)$-četvorke u prstenu $Z[\sqrt{-2}]$, ali i u prstenima cijelih brojeva u nekim drugim kvadratnim poljima. Koristeći poznate rezultate o proširenjima nekih familija skupova do $D(-1)$-četvorke u $\mathbb{Z}$, dobili smo neke nove rezultate o proširenjima $D(-1)$-parova u imaginarnim kvadratnim poljima. Naime, uz uvjet $t > 1$, uspjeli smo pokazati sljedeće:

i) Ne postoji $D(-1)$-četvorka oblika $\{1, 2, c, d\}$ u $\mathbb{Z}[\sqrt{-t}]$.

ii) Ako je $b \in \{5, 10, 26, 50\}$ i $t \neq b-1$, onda ne postoji $D(-1)$-četvorka oblika $\{1, b, c, d\}$ u $\mathbb{Z}[\sqrt{-t}]$.

iii) Ako $t \notin \{4, 16\}$, onda ne postoji $D(-1)$-četvorka oblika $\{1, 17, c, d\}$ u $\mathbb{Z}[\sqrt{-t}]$.

iv) Ako $t \notin \{4, 9, 36\}$, onda ne postoji $D(-1)$-četvorka oblika $\{1, 37, c, d\}$ u $\mathbb{Z}[\sqrt{-t}]$.

Za $t = 1$ i ostale izuzetke iz tvrdnji (ii), (iii), (iv) također smo pokazali da postoji beskonačno mnogo $D(-1)$-četvorki oblika $\{1, b, -c, d\}$, $c, d > 0$ u $\mathbb{Z}[\sqrt{-t}]$.

Promatrajući proširenje do $D(-1)$-četvorke, $D(-1)$-para $\{1, 17\}$ u $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ i $D(-1)$-para $\{1, 37\}$ u $Z[\sqrt{-3}]$, pojavile su se tri mogućnosti obzirom na predznak elemenata c i d. To nas je dovelo do formiranja sustava simultanih pellovskih jednadžbi, čija smo rješenja tražili u skupu cijelih brojeva. Pri tome smo koristili rezultate iz simultanih diofanstkih aproksimacija, linearne forme u logaritmima algebarskih brojeva, te Baker-Davenportovu redukciju.