

FRAKTALNA ANALIZA NEOMEĐENIH SKUPOVA U EUKLIDSKIM PROSTORIMA: KOMPLEKSNE DIMENZIJE I LAPIDUSOVE ZETA FUNKCIJE

Bavimo se *relativnim fraktalnim bubnjevima* i njihovim *fraktalnim zeta funkcijama Lapidusovog tipa*, kao i generalizacijama ovih pojmova za slučaj neomeđenih skupova u beskonačnosti. Relativni fraktalni bubnjevi su sami po sebi generalizacija pojma omeđenog skupa u Euklidskom prostoru. Ovdje nastavljamo istraživanje njihovih svojstava i višedimenzionalne teorije njihovih fraktalnih zeta funkcija te pripadajućih *kompleksnih dimenzija* koje je započeto suradnjom M. L. Lapidusa i D. Žubrinića 2009. godine a kojoj se G. Radunović pridružio nešto kasnije.

Teorija kompleksnih dimenzija već je vrlo dobro razvijena za slučaj *fraktalnih struna*, odnosno, fraktalnih podskupova realnog pravca. Kompleksne dimenzije relativnog fraktalnog bubnja definirane su kao polovi meromorfnog proširenja pripadajuće *razdaljinske* ili *cijevne zeta funkcije*. Na određeni način kompleksne dimenzije relativnog fraktalnog bubnja generaliziraju pojam njegove *box dimenzije* (ili *dimenzije Minkowskog*). Preciznije, uz neke blage uvjete, vrijednost box dimenzije relativnog fraktalnog bubnja jest pol njegove pripadajuće fraktalne zeta funkcije s maksimalnom vrijednošću realnog dijela. Štoviše, reziduum u tom polu usko je povezan sa *sadržajem Minkowskog* danog relativnog fraktalnog bubnja.

Izvodimo važne rezultate koji donose daljnje opravdanje pojma ‘kompleksnih dimenzija’ i povezuju ga s fraktalnim svojstvima danog relativnog fraktalnog bubnja. Preciznije, kao rezultat dobivamo *fraktalne cijevne formule* za klasu relativnih fraktalnih bubnjeva koje izražavaju njihovu *relativnu cijevnu funkciju*, odnosno, Lebesgueovu mjeru njihove relativne δ -okoline za male vrijednosti δ , kao sumu po reziduumima njihove fraktalne zeta funkcije. Te formule su dane s greškom ili bez greške i vrijede po točkama ili distribucijski ovisno svojstvima rasta pripadajuće fraktalne zeta funkcije. Važnost ovih formula je u tome što pokazuju kako su kompleksne dimenzije povezane s asimptotikom relativne cijevne funkcije danog relativnog fraktalnog bubnja. Kao primjenu izvodimo kriterij za *Minkovskivljevu izmjerivost* velike klase relativnih fraktalnih bubnjeva. Nadalje, očekivano, pokazujemo da su kompleksne dimenzije danog relativnog fraktalnog bubnja invarijantne u odnosu na dimenziju ambijentnog prostora.

Uvodimo generalizaciju teorije kompleksnih dimenzija u kontekstu *neomeđenih skupova u beskonačnosti* koja može poslužiti kao novi pristup primjeni fraktalne analize na neomeđene skupove u Euklidskim prostorima. U slučaju neomeđenih skupova konačne Lebesgueove mjere, generalizaciju provodimo uvođenjem pojmova *sadržaja Minkowskog u beskonačnosti* i *box dimenzije*

u beskonačnosti (ili dimenzije Minkowskog u beskonačnosti) koji opisuju njihova fraktalna svojstva. Nadalje, uvodimo i pripadajuću *Lapidusovu* (ili *razdaljinsku*) *zeta funkciju u beskonačnosti* te pokazujemo da je dobro povezana s fraktalnim svojstvima neomeđenih skupova. Nastavljamo s konstrukcijom zanimljivih primjera kvaziperiodičkih skupova u beskonačnosti s proizvoljnim brojem (moguće i beskonačnim) kvaziperioda koji posjeduju složena fraktalna svojstva.

Također se bavimo i prirodnim pitanjem koje se postavlja prilikom istraživanja neomeđenih skupova i njihovih fraktalnih svojstava, u vidu pronalaza rezultata koji ih povezuju s fraktalnim svojstvima njihovih slika po jednočkovnoj kompaktifikaciji i po geometrijskoj inverziji. Nadalje, također istražujemo i fraktalna svojstva neomeđenih skupova beskonačne Lebesgueove mjere uvođenjem pojmova parametarskog ϕ -omotačkog sadržaja Minkowskog u beskonačnosti i pripadajuće parametarske ϕ -omotačke dimenzije Minkowskog u beskonačnosti (ili ϕ -omotačke box dimenzije u beskonačnosti) te izvodimo rezultate koji povezuju ove pojmove s razdaljinskom zeta funkcijom u beskonačnosti.