A

Drugi kolokvij iz Matematike

1. Izračunajte sljedeće limese:

   a)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$ b)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ c)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^3})$

   d)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{5}{x^2}}$ e)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x-1}$.

2. [**10 bod.**] Nadopunite definiciju:

   Realan broj L je limes funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $a \in D'$ ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D$, za koji je $a_n \neq$ _______ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ _______ vrijedi

   $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \_\_\_\_\_\_\_.$$

   Ako je a izolirana točka skupa D, onda za graničnu vrijednost funkcije f u točki a uzimamo ______.

3. [**5 bod.**] Nadopunite definiciju:

   Pravac $y = kx + l$ je __________ kosa asimptota funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ako vrijedi

   $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - l) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

4. [**10 bod.**] Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije zadane forumulom $f(x) = e^{2x^2}$ u točki $T_0 = (-1, f(-1))$.

5. [**5 bod.**] Nadopunite definiciju derivacije funkcije $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$:

   $$f'(x_0) = \lim_{x\to\_\_\_} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-\_\_\_\_}.$$

6. Derivirajte sljedeće funkcije:

   a)[**5 bod.**] $f(x) = x^3 - \sqrt[5]{x} + \dfrac{\pi}{4}$ b) [**5 bod.**] $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

   c)[**10 bod.**] $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ d)[**10 bod.**] $f(x) = (x+1)^x$

   e)[**5 bod.**] $f(x) = x\ln(2x+5)$.

7. [**10 bod.**] Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$.

B

Drugi kolokvij iz Matematike

1. Izračunajte sljedeće limese:

   a)[**5 bod.**] $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ b)[**5 bod.**] $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(-5x)}{x}$ c)[**5 bod.**] $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3})$

   d)[**5 bod.**] $\lim_{x\to 0}(1+5x^2)^{\frac{2}{x^2}}$ e)[**5 bod.**] $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{2}{x-3}$.

2. [**10 bod.**] Nadopunite definiciju:

   Realan broj L^- je limes slijeva funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $a \in D'$ ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D$, za koji je $a_n <$ ________ i $\lim_{n\to\infty} a_n =$ ________ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

3. [**5 bod.**] Nadopunite definiciju:

   Pravac $y = kx + l$ je ____________ kosa asimptota funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ako vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - l) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

4. [**10 bod.**] Odredite realni broj a tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+5}{x-1}, & x < 1 \\ ax+1, & x \geq 1 \end{cases}$$

   bude neprekidna u točki $x_0 = 1$.

5. [**5 bod.**] Nadopunite definiciju derivacije funkcije $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ u točki $c \in \langle a, b\rangle$:

$$f'(c) = \lim_{\_\_\_\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - \_\_\_\_}.$$

6. Derivirajte sljedeće funkcije:

   a)[**5 bod.**] $f(x) = x^4 - \sqrt[3]{x} + \dfrac{\pi}{3}$ b)[**5 bod.**] $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$

   c)[**10 bod.**] $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x}}$ d)[**10 bod.**] $f(x) = (x+1)^{x-1}$

   e)[**5 bod.**] $f(x) = x\ln(3x+2)$.

7. [**10 bod.**] Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+1}$.

Tablica derivacija elementarnih funkcija

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0, \quad c \in \mathbb{R} \\
(x^{\alpha})' &= \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x} \log_a e, \quad x > 0 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0 \\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Tablica derivacija elementarnih funkcija

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0, \quad c \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &= \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x} \log_a e, \quad x > 0 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0 \\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

C

Drugi kolokvij iz Matematike

1. Izračunajte sljedeće limese:

   a)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ b)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{3x}$ c)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3-3})$

   d)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to 0} (1+6x^2)^{\frac{4}{x^2}}$ e)[**5 bod.**] $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{5}{x-4}$.

2. [**10 bod.**] Nadopunite definiciju:

   Realan broj L^+ je limes zdesna funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $a \in D'$ ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D$, za koji je $a_n >$ ________ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ________ vrijedi

   $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

3. [**5 bod.**] Nadopunite definiciju:

   Pravac $x = a$ je vertikalna asimptota funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, ako vrijedi

   $$\lim_{x\to \_\_\_\_} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \_\_\_\_.$$

4. [**10 bod.**] Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije zadane forumulom $f(x) = e^{-x^2}$ u točki $T_0 = (1, f(1))$.

5. [**5 bod.**] Nadopunite definiciju derivacije funkcije $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$:

   $$f'(x_0) = \lim_{\_\_\_\_\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\_\_\_\_}.$$

6. Derivirajte funkcije:

   a)[**5 bod.**] $f(x) = -x^4 + \sqrt[5]{x} + \dfrac{\pi}{6}$ b)[**5 bod.**] $f(x) = \dfrac{5x-1}{2x+1}$

   c)[**10 bod.**] $f(x) = \sqrt{4+\sqrt{x}}$ d)[**10 bod.**] $f(x) = (2x+1)^{x-1}$

   e)[**5 bod.**] $f(x) = x\sin(3x+2)$.

7. [**10 bod.**] Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \dfrac{x^2}{4x+1}$.

D

Drugi kolokvij iz Matematike

1. Izračunajte sljedeće limese:

   a)[**5 bod.**] $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$ b)[**5 bod.**] $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-6x)}{x}$ c)[**5 bod.**] $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+7}-\sqrt{x^3})$

   d)[**5 bod.**] $\lim_{x\to 0}(1+8x^2)^{\frac{3}{x^2}}$ e)[**5 bod.**] $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1}$.

2. [**10 bod.**] Nadopunite definiciju:
   Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $a \in D$ ako postoji $\lim_{x\to a}$ _____ te ako vrijedi
   $$\lim_{x\to a} f(x) = \_\_\_\_\_\_.$$

3. [**5 bod.**] Nadopunite definiciju:
   Pravac $x = a$ je vertikalna asimptota funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, ako vrijedi
   $$\lim_{x\to a^-} f(x) = \_\_\_\_\_ \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to \_\_\_\_} f(x) = \pm\infty.$$

4. [**10 bod.**] Odredite realni broj a tako da funkcija
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-7x+6}{x-1}, & x < 1 \\ 2ax+1, & x \geq 1 \end{cases}$$
   bude neprekidna u točki $x_0 = 1$.

5. [**5 bod.**] Nadopunite definiciju derivacije funkcije $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ u točki $c \in \langle a, b\rangle$:
   $$f'(c) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(c + \_\_\_\_) - f(c)}{\_\_\_\_}.$$

6. Derivirajte sljedeće funkcije:

   a)[**5 bod.**] $f(x) = -2x^6 + \sqrt[4]{x} + \frac{2\pi}{3}$ b)[**5 bod.**] $f(x) = \frac{x-1}{7x+1}$

   c)[**10 bod.**] $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ d)[**10 bod.**] $f(x) = (x-1)^{x+3}$

   e)[**5 bod.**] $f(x) = x\cos(3x+2)$.

7. [**10 bod.**] Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x^2}{5x+1}$.

Tablica derivacija elementarnih funkcija

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0, \quad c \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &= \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x} \log_a e, \quad x > 0 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0 \\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Tablica derivacija elementarnih funkcija

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0, \quad c \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &= \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x}\,\log_a e, \quad x > 0 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0 \\
(a^x)' &= a^x\,\ln a, \quad x \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\,\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$