Skup realnih brojeva

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Kada kažemo skup, označen s velikim slovom S, podrazumijevamo da se radi o elementima x koji čine cjelinu, odnosno možemo reći da je skup S sastavljen od elemenata x koji imaju odredeno svojstvo $M(x)$:

$$S = \{ \; x \mid x \text{ ima svojstvo } M(x)\}.$$

Primjer 1. *Neki od skupova koji se spominju u osnovnoj i srednjoj školi su: skup prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$*, skup cijelih brojeva* $\mathbb{Z}$*, skup realnih brojeva* $\mathbb{R}$*.*

Primjer 2. *Ako želimo zapisati skup kojeg čine parni prirodni brojevi manjih od 11 to možemo napraviti na sljedeća dva načina:*

(i) $S_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

(ii) $S_1 = \{x \mid x \textit{ parni prirodni brojevi manjih od } 11\}$.

Ako element x pripada skupu S to označavamo s $x \in S$, a ako element y ne pripada skupu S to označavamo s $y \notin S$. Npr. $2 \in S_1$, odnosno $12 \notin S_1$. Prazan skup je onaj skup koji ne sadrži niti jedan element i za njega koristimo oznaku $\emptyset$. Za skup kažemo da je neprazan ako sadrži barem jedan element.

Definicija 1. Neka su A i B dva skupa. Kažemo da je skup A podskup skupa B ako je svaki element skupa A također i element skupa B i pišemo $A \subseteq B$. Ako je A podskup od B i skup B sadrži barem jedan element koji nije u skupu A kažemo da je A pravi podskup od B i pišemo $A \subset B$.

Primjer 3. *Za skupove brojeva vrijedi:*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

gdje je s $\mathbb{Q}$ *označen skup racionalnih brojeva.*

Definicija 2. Za skupove A i B kažemo da su jednaki i pišemo $A = B$ ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
U protivnom kažemo da su skupovi A i B različiti i pišemo $A \neq B$.

Na skupu $\mathbb{R}$ imamo definiranu relaciju uređaja "$\leq$" prema kojoj za svaka dva realna broja x i y vrijedi ili $x < y$ ili $x > y$ ili $x = y$.

Relacija uređaja ima sljedeća svojstva:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leq x$ (refleksivnost)

(ii) ako je $x \leq y$ i $y \leq z$ onda je $x \leq z$ (tranzitivnost)

(iii) ako je $x \leq y$ i $y \leq x$ onda je $x = y$ (antisimetričnost)

(iv) za bilo koja dva realna broja $x, y \in \mathbb{R}$ je $x \leq y$ ili $y \leq x$ (linearnost ili totalnost)

Intervali

Definicija 3. Otvoreni interval realnih brojeva $\langle a, b\rangle$, određen s dva realna broja a, b, $a < b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a < x < b$, tj.

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Definicija 4. Zatvoreni interval ili segment realnih brojeva $[a, b]$, određen s dva realna broja a, b, $a \leq b$, je skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a \leq x \leq b$, tj.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Pored otvorenih i zatvorenih intervala definiraju se i poluotovreni intervali

$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \qquad [a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

i beskonačni intervali

$$\langle -\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \qquad \langle -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

$$\langle a, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \qquad [a, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

Primjer 4. *Riješimo nejednadžbu* $1 < 3x + 2 \leq 5$ *i rezultat zapišimo u formi intervala.*

Imamo:

$$1 < 3x + 2 \leq 5 \Big/ -2$$

$$-1 < 3x \leq 3 \Big/ \cdot \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < x \leq 1,$$

tj. rješenje možemo zapisati u obliku $x \in \left\langle -\frac{1}{3}, 1\right]$.

Definicija 5. Otvorenom okolinom realnog broja a nazivamo svaki otvoreni interval realnih brojeva koji sadrži broj a.
Simetrična otvorena okolina realnog broja a je otvoreni interval kome je a sredina. Sve simetrične okoline broja a su oblika $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ i nazivamo ih $\varepsilon-$okoline broja a.

Primjer 5. *Intervali $\langle 1,4\rangle$, $\langle -10,15\rangle$ i $\langle 2.9,3.5\rangle$ su okoline broja 3, dok su intervali $\langle 2,4\rangle$, $\langle -10,16\rangle$ i $\langle 2.8,3.2\rangle$ simetrične okoline broja 3.*

Supremum i infimum

Definicija 6. Kažemo da je skup $S\subseteq\mathbb{R}$ odozgo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj M takav da je $x\leq M$ za svaki $x\in S$. Svaki broj M s navedenim svojstvom nazivamo majoranta ili gornja međa skupa S. Ako skup S nije odozgo omeđen kažemo da je odozgo neomeđen.
Kažemo da je skup $S\subseteq\mathbb{R}$ odozdo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj m takav da je $x\geq m$ za svaki $x\in S$. Svaki broj m s navedenim svojstvom nazivamo minoranta ili donja međa skupa S. Ako skup S nije odozdo omeđen kažemo da je odozdo neomeđen.
Skup $S\subseteq\mathbb{R}$ je omeđen, ako je i odozgo i odozdo omeđen. U protivnom se kaže da je S neomeđen.

Primjer 6. *Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije odozgo omeđen jer za svaki realan broj M postoji prirodan broj veći od M. Skup $\mathbb{N}$ je odozdo omeđen i minoranta je svaki realni broj manji ili jednak 1. Skupovi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ su neomeđeni i odozgo i odozdo.*

Primjer 7. *Navedimo još nekoliko primjera:*

(a) Skup $A=\langle -\infty,-1]$ je neomeđen odozdo i omeđen odozgo, pri čemu je svaki realni broj veći ili jednak -1 njegova majoranta.

(b) Skup $B=\langle -3,\infty\rangle$ je neomeđen odozgo i omeđen odozdo, pri čemu je svaki realni broj manji ili jednak -3 njegova minoranta.

(c) Skup $C=[-7,5\rangle$ je omeđen. Svaki realni broj manji ili jednak -7 je njegova minoranta, a svaki realni broj veći ili jednak 5 je njegova majoranta.

(d) Neka je $D=\left\{\frac{n}{n+1}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}$. Pogledajmo prvih nekoliko članova ovog skupa:

$$D=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\dots\right\}.$$

Primjetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{2}\leq x<1,\qquad \forall x\in D.$$

Iz gornje nejednakosti zaključujemo da je skup D omeđen. Svaki realni broj manji ili jednak $\frac{1}{2}$ je njegova minoranta, a svaki realni broj veći ili jednak 1 je njegova majoranta.

(e) Neka je $E = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$. Nazivnik članova ovog skupa je uvijek veći ili jednak od 1, a budući je brojnik uvijek isti i jednak 1 zaključujemo da je:

$$0 < x \leq 1, \qquad \forall x \in E,$$

tj. skup E je omeđen. Svaki realni broj manji ili jednak 0 je njegova minoranta, a svaki realni broj veći ili jednak 1 je njegova majoranta.

(f) Postupajući analogno kao u prethodna dva primjera zaključujemo da je skup $F = \left\{ \frac{3n+4}{7n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ omeđen. Svaki realni broj manji ili jednak $\frac{3}{7}$ je njegova minoranta, a svaki realni broj veći ili jednak $\frac{7}{6}$ je njegova majoranta.

Definicija 7. Najmanju majorantu skupa S nazivamo supremum i označavamo sa $\sup S$. Ako je $\sup S \in S$, nazivamo ga maksimalnim elementom skupa S i označavamo s $\max S$. Najveću minorantu skupa S nazivamo infimum i označavamo s $\inf S$. Ako je $\inf S \in S$, nazivamo ga minimalnim elementom skupa S i označavamo s $\min S$.

Primjer 8. *Neka su A, B, C, D, E i F skupovi iz Primjera 7. Tada je:*

(a) $\sup A = \max A = -1$,

(b) $\inf B = 3$,

(c) $\inf C = \min C = -7$ *i* $\sup C = 5$,

(d) $\inf D = \min D = \frac{1}{2}$ *i* $\sup D = 1$,

(e) $\inf E = 0$ *i* $\sup E = \max E = 1$,

(f) $\inf F = \frac{3}{7}$ *i* $\sup F = \max F = \frac{7}{6}$.

Primjetimo:

(i) Svaki odozgo omeđen skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum, a svaki odozdo omeđen skup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima infimum.

(ii) M je supremum skupa S onda i samo onda ako je M majoranta od S i ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x_0 \leq M$.

(iii) m je infimum skupa S onda i samo onda ako je m minoranta od S i ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $m + \varepsilon > x_0 \geq m$.

Apsolutna vrijednost realnog broja

Za svaki realan broj $x \in \mathbb{R}$ definira se apsolutna vrijednost $|x|$ broja x formulom:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Geometrijski, $|x|$ značni udaljenost točke na brojevnom pravcu, koja predstavlja realan broj x, od ishodišta. Iz definicije apsolutne vrijednosti vidi se da je $|-x| = |x|$ i $x \leq |x|$. Pomoću jednakosti $|x| = \sqrt{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, lako se provjere sljedeća svojstva:

(i) $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (nejednakost trokuta),

(iv) $|x - y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

(v) $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$, $\forall a > 0$,

(vi) $||x| - |y|| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Primjer 9. *Riješimo jednadžbu* $|3x - 1| = 2x + 5$.

$$\begin{array}{rcl} (a)\ \textit{za}\ 3x-1 \geq 0,\ \textit{tj.}\ x \geq \frac{1}{3} & & \\ 3x - 1 & = & 2x + 5 \\ x & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (b)\ \textit{za}\ 3x-1 < 0,\ \textit{tj.}\ x < \frac{1}{3} & & \\ -3x + 1 & = & 2x + 5 \\ x & = & -\frac{4}{5} \end{array}$$

Budući je $6 \geq \frac{1}{3}$ *i* $-\frac{4}{5} < \frac{1}{3}$, *oba broja su rješenja polazne jednadžbe.*

Primjer 10. *Riješimo nejednadžbu* $x^2 < 3$.
Nakon korjenovanja imamo:

$$|x| < \sqrt{3},$$

te je rješenje moguće zapisati kao $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$.