Matrice

1 Pojam matrice

Matrica je tablica brojeva. Promotrite sljedeći primjer matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matrica A iz gornjeg primjera ima četiri redka i tri stupca. Kažemo da je A tipa ili formata 4×3.

Definicija Familiju $\mathbf{A}$ od $m \cdot n$ realnih brojeva $a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ zapisanih u obliku pravokutne tablice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

nazivamo realnom matricom tipa $m \times n$, gdje prirodan broj m označava broj redaka a prirodan broj n broj stupaca.

Brojeve $a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ nazivamo **elementima matrice** i i-tom redku i j-tom stupcu. Matricu kraće zapisujemo kao $A = (a_{ij})$. Za matricu $A = (a_{ij})$ kažemo da je **kvadratna** ukoliko $m = n$, tj. broj redaka je jednak broju stupaca.

Jedinična matrica I i **nul matrica O** se definiraju kao:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

jedinice na diagonali, svi ostali elementi su nule, te

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

tj. svi elementi matrice su nula.

Definicija Za dvije matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ tipa $m \times n$ kažemo da su jednake ukoliko $a_{ij} = b_{ij}$, za sve $i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots n$.

Primjer Matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

su jednake.

2 Operacije s matricama

2.1 Zbroj matrica

Definicija Neka su $\mathbf{A} = (a_{ij})$ i $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matrice tipa $m \times n$. *Zbroj matrica* $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je matrica $\mathbf{C} = (c_{ij})$ tipa $m \times n$, s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, za svaki $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$.

Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 9 \\ -6 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

Oduzimanje je analogno zbrajanju $C = A - B$, tako da $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorem Neka su A, B i C matrice tipa $m \times n$. Vrijede sljedeća svojstva zbrajanja matrica:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + O = O + A$, gdje je O nul matrica tipa $m \times n$.
3. $A + (-A) = -A + A = O$
4. $A + B = B + A$

2.2 Produkt matrice skalarom

U matematici je *skalar* izraz za broj. Matricu A množimo skalarom α tako da svaki element matrice pomnožimo s α.

Primjer Zadana je matrica A te skalar $\alpha = -2$.

$$\alpha \cdot A = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -8 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Teorem Neka su A i B matrice tipa $m \times n$ i neka su α i β skalari. Tada vrijede sljedeća svojstva:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. $1 \cdot A = A$

2.3 Produkt matrica

Neka je matrica $A = (a_{ij})$ tipa $m \times p$ i $B = (b_{ij})$ tipa $p \times n$. Za matrice A i B kažemo da su *ulančane* budući je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B.

Definicija Produkt matrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$, tipa $m \times p$ i $\mathbf{B} = (b_{ij})$, tipa $p \times n$ je matrica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ij})$ tipa $m \times n$, s elementima

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = 1 \dots m, j = 1 \dots n.$$

Napomena Obratite pažnju da je svojstvo ulančanosti nužan uvijet da bi se dvije matrice mogle množiti.

Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-2)+0 & -1+0+0 & 6+3+0 \\ 4-6+48 & -4+0+6 & 24+9+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 9 \\ 46 & 2 & 45 \end{bmatrix}.$$

Primjetite da ne možemo množiti $B \cdot A$.

Na sljedećem primjeru ćemo demonstrirati kako komutativnost množenja matrica ne mora vrijediti, tj. $A \cdot B$ ne mora biti isto što i $B \cdot A$.

Primjer

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Promotrimo

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 0+4 \\ 2+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

U drugu ruku,

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+3 & 2+0 \\ 0+4 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorem Neka je matrica A tipa $m \times p$, B tipa $p \times n$ i C tipa $m \times n$. Vrijede sljedeća svojstva množenja matrica:

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B+C) = AB + AC$
3. $(A+B)C = AC + BC$
4. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$, gdje je α neki skalar.

2.4 Neke specijalne matrice

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica s n redaka i n stupaca.

- Za njene dijagonalne elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ kažemo da leže na **glavnoj dijagonali**, a njihov zbroj označavamo s tr**A** i zovemo **trag** matrice A.
- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **dijagonalna**, ako su joj svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli. Znači, a_{ij}=0, za i različito od j
- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **gornje trokutasta**, ako su joj svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli. a_{ij}=0 za i > j
- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **donje trokutasta**, ako su joj svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli. a_{ij}=0 za i<j

Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrica formata $m \times n$. Pomoću nje definiramo $n \times m$ matricu $\mathbf{A}^T = (a^T_{ij})$, tako da bude $a^T_{ij} = a_{ji}$. Matricu $\mathbf{A}^T$ nazivamo **transponiranom matricom** matrice $\mathbf{A}$.

- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **simetrična** ako je $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. tj. a_{ij}=a_{ji}

- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **antisimetrična** ako je $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Antisimetrična matrica na glavnoj dijagonali ima nule.
  a_{ij}= - a_{ji}