Regularne Matrice

1 Definicija regularne matrice

Motivacija Svaki realan broj $a \neq 0$ ima svoj jedinstven inverz a^{-1} obzirom na množenje, tj. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Na primjer, $a = 3$ i $a^{-1} = 1/3$.

Međutim, u ovom poglavlju ćemo pokazati da kod množenja matrica inverz ne mora uvijek nužno postojati. Naime, neka je A kvadratna matrica tipa $n \times n$. Postoji li matrica B takva da vrijedi

$$A \cdot B = B \cdot A = I,$$

gdje I označava jediničnu matricu.

Ukoliko takva B postoji, matricu A nazivamo **regularnom** ili **invertibilnom** matricom. Takav B nazivamo inverznom matricom matrici A i označavamo s A^{-1}.

Ukoliko takva B ne postoji, matricu A nazivamo **singularnom**.

Primjer Za danu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

postoji li matrica

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I$? Odgovor na to pitanje ćemo potražiti tako da pokušamo implementirati definiciju regularne matrice tj. izračunamo

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix} \neq I$$

U oba slučaja matrice ne mogu biti jedinične, niti za koji izbor brojeva $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$. Stoga možemo zaključiti da matrica A nema svoju inverznu matricu. Dakle, A je singularna.

Primjer Za danu matricu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

pokažimo da je njezin inverz matrica

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primjetite da to možemo jednostavno pokazati tako da izračunamo:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.1 Gaussova metoda za invertiranje matrice

Gaussova metoda za invertiranje matrice je jednostavna metoda za ispitivanje je li neka matrica regularna, te za određivanje inverza takve matrice ukoliko je matrica regularna. Gaussova metoda koristi ili samo elementarne operacije nad stupcima matrice, ili elementarne operacije na recima matrice. Mi ćemo izabrati ovo drugo. Pod Gaussovim elementarnim operacijama nad recima podrazumjevamo:

1. permutiranje redaka;

   Na primjer

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

   U gornjem primjeru prvi redak postaje treći, a treći redak prvi.

2. množenje retka skalarom različitim od nule;

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   U gornjem primjeru prvi redak matrice A je pomnožen skalarom 2.

3. dodavanje retku nekog drugog retka prethodno pomnoženog skalarom.

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   U gornjem primjeru je treći redak pomnožen skalarom 1, te dodan prvom retku.

Napomena Na potpuno isti način definiraju se elementarne operacije nad stupcima matrice. Kasnije ćemo vidjeti da se istovjetne elementarne operacije nad recima ili stupcima koriste i kod rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

Sama Gaussova metoda za invertiranje matrice se moze sažeti u sljedeća dva koraka:

korak I s $\left[A \vdots I\right]$ označimo matricu koju dobivamo tako da matrici A nadopišemo jediničnu matricu I istog reda;

korak II elementarnim operacijama nad recima matricu $\left[A \vdots I\right]$ svodimo na oblik $\left[I \vdots B\right]$. Ukoliko je to moguće, A je regularna i $A^{-1} = B$. Ukoliko nije moguće, A je singularna.

Na sljedećem primjeru pokušat ćemo ilustrirati gore opisanu metodu invertiranja.

Primjer Odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ukoliko postoji. Postupak invertiranja se provodi po recima na sljedeći način:

korak I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

korak II Provedene su sljedeće operacije na recima:

- Prvi redak pomnožen s 1 i dodan drugom retku. Prvi redak pomnožen s -1 i dodan trećem retku.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Drugi redak pomnožen s -2 i dodan prvom retku.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Treći redak dodan prvom retku.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Elementarnim operacijama nad recima uspjeli smo svesti matricu A na jediničnu matricu. Dakle, matrica A je regularna i

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sljedećim primjerom želimo demonstrirati da nije uvijek moguće svesti matricu na jediničnu elementarnim operacijama nad recima.

Primjer Odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Množenjem prvog retka s -1 i dodavanjem drugom

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

matricu A smo dobili u obliku iz kojega je nemoguće dalje elementarnim operacijama nad recima dobiti jediničnu matricu. Dakle, matrica A je singularna.

Ponekad je potrebno primjeniti elementarnu operaciju permutiranja redaka kako bismo na glavnoj dijagonali matrice dobili jedinicu.

Primjer Odredimo inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tada zamjenom prva dva redka možemo postići jedinicu željenom mjesto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ -3 & 6 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 6 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dijeljenjem prvog redka sa -3 imamo

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & \vdots & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

množenjem drugog redka sa 2 te dodavanjem prvom redku imamo

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2 Sustav linearnih algebarskih jednadžbi

Općenito sustav od m linearnih algebarskih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ možemo zapisati na sljedeći način:

Opći oblik sustava od m linearnih algebarskih jednadžbis n nepoznanica, pri čemu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ označavaju nepoznanice, glasi:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

- Realne brojeve a_{ij} $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ nazivamo **koeficijentima** sustava, a realne brojeve b_i, $i = 1, \ldots, m$, **slobodnim koeficijentima** sustava.

Matrični zapis sustava

Sustavu (1) pridružit ćemo matricu sustava A tipa $m \times n$, matricu slobodnih koeficijenata b tipa $m \times 1$, te matricu nepoznanica x tipa $n \times 1$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Tada sustav (1) možemo kraće zapisati u ekvivalentnom matričnom obliku:

$$A \cdot x = b. \tag{2}$$

Primjetite da su matrice A i x ulančane, tako da je množenje valjano definirano. Proširenu matricu

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

zovemo **proširenom matricom sustava** (1).

Takav izbor matrice x tako da sustav (1) tj. sustav (2) bude zadovoljen, nazivamo *rješenjem sustava.*

2.1 Gaussova metoda eliminacije za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednažbi

Ova metoda se sastoji u tome da elementarnim operacijama nad recima proširenu matricu $[A|b]$ svedemo na ekvivalentan oblik $[T|b']$, gdje je T gornje trokutasta matrica. Gornje trokutasti sustav $[T|b']$ se jednostavno rješava tzv. supstitucijom unatrag (odozdo prema gore).

Na sljedećem primjeru ćemo ilustrirati korake Gaussove metode eliminacije.

Primjer Neka je zadan sljedeći sustav od tri jednadžbe i tri nepoznanice, x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{aligned}$$

Ukoliko gornji sustav zapišemo matrično, tako da koeficijente zapišemo u matricu A a slobodne koeficijente u matricu b, proširena matrica $[A|b]$ će biti oblike

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

Množenjem prvog retka s -5 i dodavanjem drugom, te prvog retka s -3 i dodavanjem trećem dobivamo

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & -9 & -18 & -126 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right].$$

Druga Gaussova elementarna operacija nam dozvoljava da redak pomnožimo skalarom. Ovo možemo sada iskoristiti te drugi redak pomnožiti s -1/9, tako da si olakšamo nastavak, te dobivamo proširenu matricu oblika

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right].$$

Još nam ostaje drugi redak pomnožiti skalarom 7, te dodati trećem

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right].$$

Primjetite da smo matricu A sveli na gornje trokutasti oblik. Sada sustav rješevamo odozdo prema dolje, tako da matrični oblik interpretiramo kao sljedeće jednadžbe iz kojih direktno možemo izračunati vrijednosti varijabli x_1, x_2 i x_3:

$$\begin{aligned} 3x_3 = 15 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 14 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 14 - 10 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 31 - 8 - 20 = 3 \end{aligned}$$