# DETERMINANTE

Determinanta $\mathbf{A} \mapsto \det\mathbf{A}$ je funkcija definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara. Osim oznake $\det\mathbf{A}$ za determinantu kvadratne matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

često se koristi i oznaka

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta matrice definira se induktivno, tj. determinanta matrice $n-$tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n-1)-$og reda. Pođimo redom.

**Definicija 1. (Determinanta prvog reda)** Determinanta matrice $\mathbf{A} = [a]$ je broj $a$.

**Definicija 2. (Determinanta drugog reda)** Determinantom matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ zovemo broj $\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

PRIMJER 1. Izračunajmo determinante sljedećih matrica.

Za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\mathbf{A} = 5$.

Za $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\mathbf{B} = -27$.

**Definicija 3. (Determinanta trećeg reda)** Determinanta matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ je broj $\mathbf{A} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

**Definicija 4. (Determinanta $n-$tog reda)** Determinanta matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je broj

$$\det\mathbf{A} = a_{11}\det\mathbf{A}_{11} - a_{21}\det\mathbf{A}_{21} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det\mathbf{A}_{n1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\det\mathbf{A}_{k1}.$$

Primjer 2. Izračunajmo sljedeću determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

Determinantu možemo računati tako da ju razvijemo po bilo kojem redku ili stupcu, naime vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem (Laplaceov razvoj determinante)** Za matricu $A$ reda $n$ imamo razvoje:

- po $i-$tom stupcu: $\det\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \det\mathbf{A}_{ki}$,
- po $i-$tom retku: $\det\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det\mathbf{A}_{ik}$.

Svojstva determinante

D.1 Matrica $\mathbf{A}$ i transponirana matrica $\mathbf{A}^T$ imaju jednake determinante, tj.

$$\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^T.$$

D.2 Ako je $A = (a_{ij})$ trokutasta matrica $n-$tog reda, onda je

$$\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

D.3 Ako dva stupca determinante zamjene mjesta, determinanta mijenja predznak.

D.4 Ako matrica $\mathbf{A}$ ima dva jednaka stupca, onda je $\det\mathbf{A} = 0$.

D.5 Ako iščezavaju svi elementi nekog stupca matrice $\mathbf{A}$, onda je

$$\det\mathbf{A} = 0.$$

D.6 Determinanta se množi skalarom tako da se samo jedan stupac pomnoži tim skalarom, tj. zajednički faktor svih elemenata nekog stupca može se izlučiti ispred determinante.

D.7 Determinanta ne mijenja vrijednost ako nekom stupcu determinante dodamo linearnu kombinaciju preostalih stupaca.

D.8 Ako je neki stupac determinante linearna kombinacija preostalih stupaca te determinante, onda je determinanta jednaka nuli.

D.9 Matrica $\mathbf{A}$ je regularna onda i samo onda ako je $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Primjer 2. Izračunajmo sljedeće determinante matrica trećeg reda :

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -30.$$

Naravno isto bismo dobili i direktnom primjenom Laplaceovog razvoja.

$$\det\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 10 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\det\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (7) = 5.$$

Uočimo $A$ i $C$ su regularne jer su im determinante različite od nula, dok $B$ nije regularna.

**Teorem (Binet-Cauchyjev teorem)** Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice istog reda, onda je

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}.$$

Uočimo da za regularnu matricu $A$ vrijedi

$$I = AA^{-1},$$

tada ako poznamo determinantu matrice $A$ koristeći teorem Binet-Cauchy možemo izračunati $\det\mathbf{A^{-1}}$, naime vrijedi:

$$\det\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}.$$

Primjer 3. Ako su $\det\mathbf{A}$ i $\det\mathbf{C}$ determinante matrica trećeg reda koje smo izračunali u prošlom primjeru, onda $\det(\mathbf{AC}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{C} = -30 \cdot 5 = -150$. Također možemo izračunati i determinante inverza, npr. $\det\mathbf{A^{-1}} = \frac{-1}{30}$.

---

## Cramerovo pravilo

Najprije ćemo uvesti ovaj pojam promatrajući sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Sustav zapisan matrično glasi

$$Ax = b,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Kako bismo uveli Cramerovo pravilo sustav ćemo riješiti metodom suprotnih koeficijenata. Množeći prvu jednadžbu susatava (1) brojem $a_{22}$, a drugu brojem $(-a_{12})$, nakon zbrajanja tako pomnoženih jednadžbi dobivamo

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}. \tag{2}$$

Ako sada prizvoljnoj matrici $A$ pridružimo det $A$ imamo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{3}$$

onda (2) možemo zapisati

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \text{odnosno} \quad Dx_1 = D_1, \tag{4}$$

gdje je broj $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ determinanta sustava. Slično ćemo dobiti da je

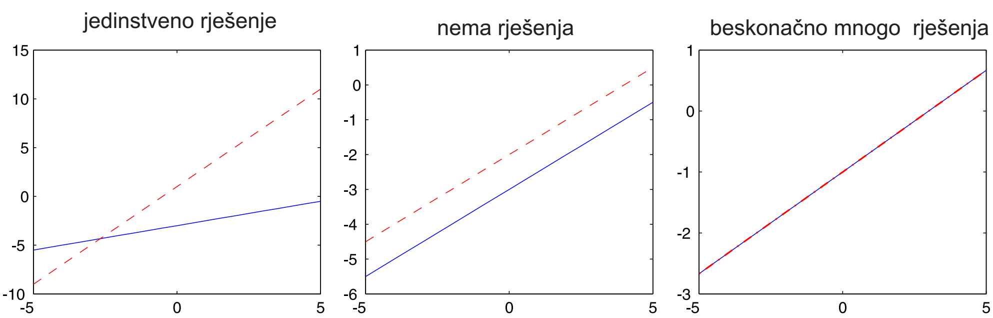
$$Dx_2 = D_2 \qquad \text{gdje je} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Iz (4) i (5) možemo zaključiti:

- ako je $D \neq 0$, sustav (1) ima jedinstveno rješenje
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}; \tag{6}$$
- ako je $D = 0$ i $D_1 = D_2 = 0$, sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja;
- ako je $D = 0$, a pri tome barem jedan od brojeva $D_1, D_2$ različit od nule, sustav nema rješenja;

Prethodno navedene tvrdnje u literaturi su poznate kao **Cramerovo pravilo**.

**Primjedba 1** *Geometrijski bismo mogli dobivena tri slučaja promatrati na sljedeći način:*



Primjer 4 Primjenom Cramerovog pravila diskutirat ćemo sljedeći sustav jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x_1 + 4x_2 = 1$$
$$4x_1 + \lambda x_2 = 1.$$

Dobivamo

$$D = \lambda^2 - 16, \quad D_1 = \lambda - 4, \quad D_2 = \lambda - 4.$$

Prema Cramerovom pravilu sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = x_2 = \frac{1}{\lambda+4}$ za $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 4\}$, za $\lambda = 4$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja leže na pravcu $4x_1+4x_2 = 1$, a za $\lambda = -4$ sustav nema rješenja.

Cramerovo pravilo vrijedi i općenito za sustav $n$ jednadžbi s $n$ nepoznanica. Neka je zadan sustav od $n$ jednadžbi s $n$ nepoznanica:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & \ldots\ a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & \ldots\ a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & \ldots\ a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array} \tag{2}$$

Zapišimo ga u vektorskom obliku:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

gdje su $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ stupci matrice sustava $\mathbf{A}$, a $\mathbf{b}$ vektor slobodnih koeficijenata.
Neka je

$$\mathbf{D} = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinanta matrice sustava (2).
Nadalje, neka je $D_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ determinanta koja se dobiva iz determinante $\mathbf{D}$ zamjenom $i-$tog stupca stupcem slobodnih koeficijenata, odnosno u determinanti $D$ zamjenimo $\mathbf{a}_i$ sa $\mathbf{b}$.

1. Sustav (2) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\mathbf{D} \neq 0$.
   U tom je slučaju rješenje dano s $x_i = \dfrac{D_i}{\mathbf{D}}$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Ako je $\mathbf{D} = 0$, da bi sustav (2) bio rješiv, mora vrijediti

   $$D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0.$$

   U suprotnom, sustav (2) nema rješenje.