Funkcije

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Definicija 1. Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $y \in K$ zovemo funkcija ili preslikavanje sa D u K i pišemo

$$f : D \to K \text{ ili } x \mapsto f(x), x \in D.$$

- skup D zovemo domena ili područje definicije (oznaka $\mathcal{D}(f)$), a skup K kodomena ili područje vrijednosti funkcije f
- za $x \in D$ odgovarajući (jedinstveni) pridruženi element $y \in K$ označavamo s $f(x)$ i zovemo slika elementa x ili vrijednost funkcije f u točki x
- slika funkcije f: skup svih vrijednosti funkcije f

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

- $x \in D$ zovemo nezavisna varijabla ili argument, a $f(x)$ zavisna varijabla
- graf Γ_f funkcije $f : D \to K$ je skup svih uređenih parova $(x, f(x))$, $x \in D$, tj.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times K$$

Načini zadavanja funkcija:

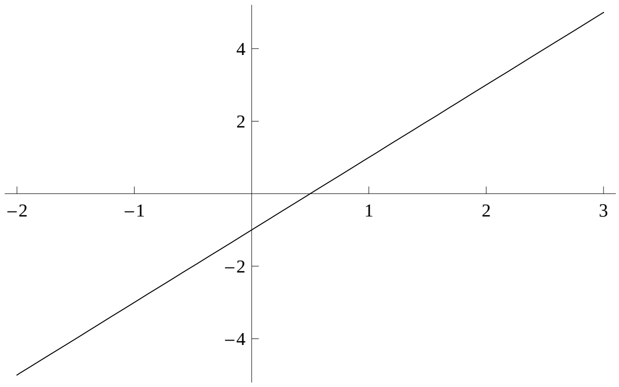
- grafički (tj. pomoću grafa ili dijagrama)
- tablično
- pomoću formule
- itd.

Primjer 1. *Afina funkcija zadana je s*

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

npr.

$$f(x) = 2x - 1$$

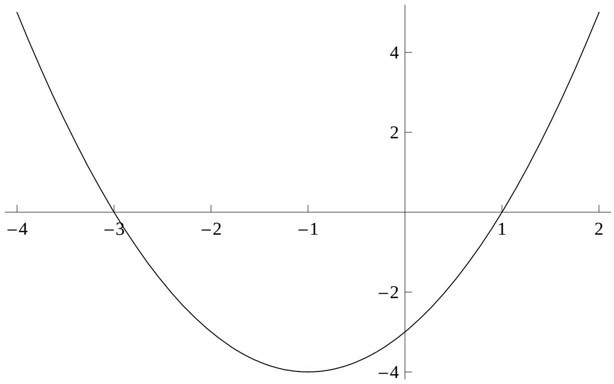


Primjer 2. *Kvadratna funkcija zadana je s*

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in R,$$

npr.

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

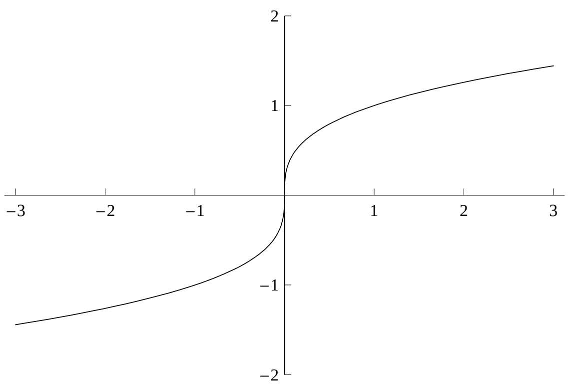


Primjer 3. *Opća potencija zadana je izrazom*

$$h(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

npr.

$$h(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$



Neka je $f : D \to K$ funkcija. Ako je $D \subseteq \mathbb{R}$ onda kažemo da je f funkcija jedne realne varijable, a ako je $K \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je f realna funkcija.

Definicija 2. Kažemo da su funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ jednake i pišemo $f = g$ onda i samo onda ako vrijedi: $A = C$, $B = D$ i $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in A$ (odnosno C).

Definicija 3. Neka su $f : A \to B$ i $g : C \to D$ dvije funkcije, takve da je $\mathcal{R}(f) \subseteq C$. Tada funkciju $h : A \to D$ definiranu formulom

$$h(x) = g(f(x)), x \in A$$

označavamo s $g \circ f$ i zovemo kompozicija funkcija f i g.

Primjer 4. *Neka je $f(x) = 2x - 1$ i $g(x) = x^2 + 2x - 3$. Odredite $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$.*

Definicija 4. Kažemo da je funkcija $f : D \to K$ injekcija (ili $1 - 1$ preslikavanje), ako

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in D).$$

Funkcija $f : D \to K$ je injekcija onda i samo onda ako

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (\forall x_1, x_2 \in D).$$

Definicija 5. Kažemo da je funkcija $f : D \to K$ surjekcija ako je $\mathcal{R}(f) = K$.

Funkcija $f : D \to K$ je surjekcija ako

$$\forall y \in K, \exists x \in D \text{ takav da je } f(x) = y.$$

Definicija 6. Kažemo da je funkcija $f : D \to K$ bijekcija (ili obostrano jednoznačno preslikavanje) ako je ona i injekcija i surjekcija.

Definicija 7. Neka je $f : D \to K$ bijekcija. Tada postoji funkcija $f^{-1} : K \to D$ definirana formulom $f^{-1}(y) := x$, gdje je $x \in D$ jedinstveni element takav da je $f(x) = y$. Funkciju f^{-1} zovemo inverzna funkcija funkcije f.

Teorem 1. *Funkcija $f : D \to K$ je bijekcija onda i samo onda ako postoji funkcija $g : K \to D$, takva da je*

(i) $f \circ g = i_K$, tj. $f(g(x)) = x$ za svaki $x \in K$ i

(ii) $g \circ f = i_D$, tj. $g(f(x)) = x$ za svaki $x \in D$.

Pri tome, funkcija g nužno je jednaka funkciji f^{-1}.

Postupak ispitivanja bijektivnosti funkcije $f : D \to K$ i pronalaženja njezinog inverza f^{-1}:
Jednadžbu $f(x) = y$, $y \in K$, gdje je $x = f^{-1}(y)$ rješavamo po x.

(i) Ako za neki $y \in K$ rješenje ne postoji, onda f nije surjekcija.

(ii) Ako za neki $y \in K$ rješenje nije jedinstveno, onda f nije injekcija.

(iii) Ako rješenje postoji i jedinstveno je za svaki $y \in K$, onda je f bijekcija a $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ je inverz od f.

Primjer 5. *Za funkcije $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$ i $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ispitajmo da li su injektivne, surjektivne, odnosno bijektivne, te u slučaju bijektivnosti pronađimo inverz funkcije.*

Primjer 6. *Odredimo rješenja jednadžbi $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ i $h(x) = 0$.*

Definicija 8. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je $x_0 \in D$ nul-točka funkcije f, ako je $f(x_0) = 0$.

Primjer 7. *Promotrimo grafove funkcija funkcija $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$ i $h(x) = \sqrt[3]{x}$.*

Definicija 9. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ monotono rastuća na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D$ ako

$$(x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \ \&\ (x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \tag{1}$$

Ako u (1) umjesto znaka "$\leq$" stoji znak "$\geq$", kažemo da je funkcija f monotono padajuća na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako u (1) umjesto znaka "$\leq$" stoji znak "$<$", kažemo da je funkcija f na intervalu $\langle a, b\rangle$ strogo monotono rastuća. Analogno se definira i pojam strogo monotono padajuće funkcije na intervalu.

Teorem 2. *Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ strogo monotona, onda je ona injektivna.*

Definicija 10. Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ postiže lokalni minimum ako postoji okolina $\mathcal{O}(x_0)$ broja x_0 takva da je

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ za svaki } x \in \mathcal{O}(x_0).$$

Funkcija f u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ postiže lokalni maksimum ako postoji okolina $\mathcal{O}(x_0)$ broja x_0 takva da je

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ za svaki } x \in \mathcal{O}(x_0).$$

Ukoliko vrijede stroge nejednakosti za $x \neq x_0$, onda govorimo o strogom lokalnom minimumu, odnosno strogom lokalnom maksimumu.

Definicija 11. Kažemo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D$ postiže globalni minimum na D ako je $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in D$. Analogno se definira i globalni maksimum na D. Ukoliko za svaki $x \neq x_0$ vrijede stroge nejednakosti, govorimo o strogom globalnom ekstremu.

Definicija 12. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, parna ako je

$$f(-x) = f(x) \text{ za svaki } x \in D.$$

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neparna ako je

$$f(-x) = -f(x) \text{ za svaki } x \in D.$$

Primjer 8. *Ispitajmo parnost funkcija* $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$ *i* $h(x) = \sqrt[3]{x}$.