Funkcije

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Definicija 1. Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ postiže lokalni minimum ako postoji okolina $\mathcal{O}(x_0)$ broja x_0 takva da je

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ za svaki } x \in \mathcal{O}(x_0).$$

Funkcija f u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ postiže lokalni maksimum ako postoji okolina $\mathcal{O}(x_0)$ broja x_0 takva da je

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ za svaki } x \in \mathcal{O}(x_0).$$

Ukoliko vrijede stroge nejednakosti za $x \neq x_0$, onda govorimo o strogom lokalnom minimumu, odnosno strogom lokalnom maksimumu.

Definicija 2. Kažemo da funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D$ postiže globalni minimum na D ako je $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in D$. Analogno se definira i globalni maksimum na D. Ukoliko za svaki $x \neq x_0$ vrijede stroge nejednakosti, govorimo o strogom globalnom ekstremu.

Definicija 3. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, parna ako je

$$f(-x) = f(x) \text{ za svaki } x \in D.$$

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je neparna ako je

$$f(-x) = -f(x) \text{ za svaki } x \in D.$$

Primjer 1. *Ispitajmo parnost funkcija* $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$ *i* $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

Definicija 4. (Konveksnost i konkavnost) Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D$ ako je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) \text{ za sve } x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle \tag{1}$$

Ako u (1) stoji znak "$\geq$", kažemo da je funkcija f konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako u (1) umjesto znaka "$\leq$" stoji znak "$<$", onda kažemo da je funkcija f strogo konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Analogno se definira i pojam stroge konkavnosti funkcije na intervalu.

Definicija 5. (Točka infleksije) Kažemo da je točka $c \in D$ točka infleksije funkcije f ako postoji realan broj $\delta > 0$, takav da je f strogo konveksna na $\langle c - \delta, c\rangle$ i strogo konkavna na $\langle c, c + \delta\rangle$ ili da je f strogo konkavna na $\langle c - \delta, c\rangle$ i strogo konveksna na $\langle c, c + \delta\rangle$.

Definicija 6. (Periodičnost) Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ periodična ako postoji pozitivan broj $T \in \mathbb{R}$, takav da je

$$f(x+T) = f(x) \text{ za svaki } x \in D. \tag{2}$$

Najmanji od brojeva T za koji je ispunjeno (2) nazivamo temeljni period funkcije f.

Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije

(a) opća potencija $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

(b) eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$, $a > 0$,

(c) logaritamska funkcija $x \mapsto \log_a x$, $a > 0$,

(d) trigonometrijske funkcije: $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$,

(e) ciklometrijske funkcije: $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}$

Definicija 7. Elementarnim funkcijama nazivamo one funkcije koje se dobivaju iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja) i konačnog broja komponiranja osnovnih elementarnih funkcija.

Polinomi

Definicija 8. Funkciju $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

nazivamo polinomom $n-$tog stupnja nad $\mathbb{R}$. Brojeve $a_i \in \mathbb{R}$ nazivamo koeficijenti polinoma. Specijalno broj a_n nazivamo najstariji ili vodeći, a a_0 slobodni koeficijent. Ako je $a_n = 1$, kažemo da je polinom normiran.

Teorem 1. *Dva polinoma* $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *i* $R_m(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ *su jednaki onda i samo onda ako je*

(i) $m = n$, *te*

(ii) $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Hornerov algoritam (shema) $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a \in \mathbb{R}$

$$P_n(a) = ((\cdots(a_n \cdot a + a_{n-1}) \cdot a + \cdots + a_2) \cdot a + a_1) \cdot a + a_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
a	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{a \cdot b_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}}$	$\underbrace{a \cdot b_{n-2} + a_{n-2}}_{b_{n-3}}$	$\dots$	$\underbrace{a \cdot b_1 + a_1}_{b_0}$	$\underbrace{a \cdot b_0 + a_0}_{P_n(a)}$

Teorem 2. *(Teorem o dijeljenju s ostatkom) Za svaka dva polinoma f i g, $g \not\equiv 0$, postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da vrijedi*

$$f = g \cdot q + r$$

U slučaju kada je $r \not\equiv 0$, tada vrijedi $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g$.

Racionalne funkcije

Definicija 9. Funkciju

$$Q(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0},$$

nazivamo racionalna funkcija. Ako je $m < n$ onda govorimo o pravoj racionalnoj funkciji, a ako je $m \geq n$ o nepravoj racionalnoj funkciji. Ako je $n = 0$, funkcija Q postaje polinom.

Teorem 3. *Svaku pravu racionalnu funkciju moguće je na jedinstven način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka.*

Eksponencijalna funkcija

Definicija 10. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definiranu formulom

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

nazivamo eksponencijalna funkcija s bazom a.

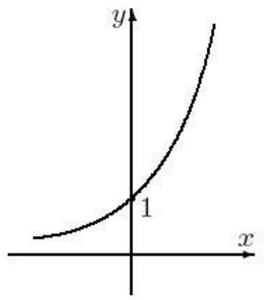
Svojstva eksponencijalne funkcije: za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi:

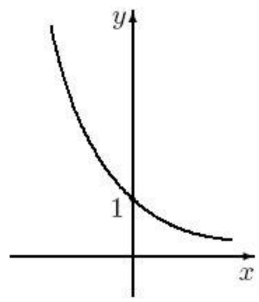
(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, tj. $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

(ii) $f(x_1 - x_2) = \dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$, tj. $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$

(iii) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$

- ako je $a > 1$, onda je f strogo rastuća funkcija
- ako je $0 < a < 1$, onda je f strogo padajuća funkcija





Logaritamska funkcija

Definicija 11. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiranu formulom

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0$$

nazivamo logaritamska funkcija s bazom a.

Svojstva logaritamske funkcije: za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ vrijedi:

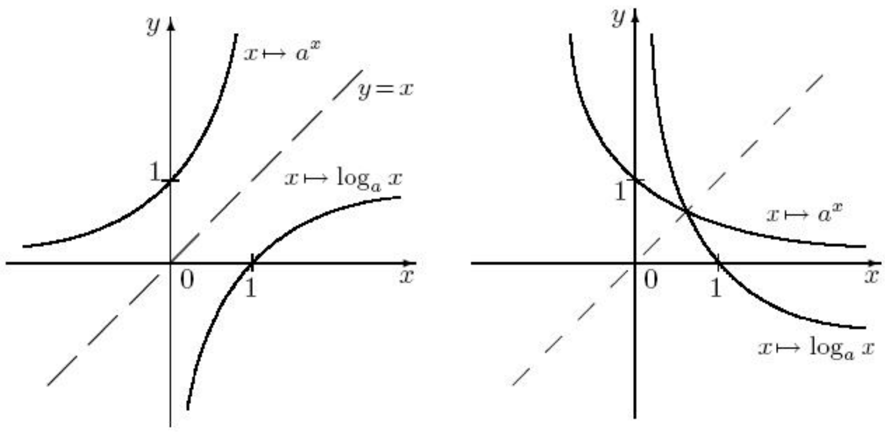
(i) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, tj. $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(ii) $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$, tj. $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

(iii) $\log_a x_1^{x_2} = x_2 \log_a x_1$

(iv) $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

- ako je $a > 1$, onda je f strogo rastuća funkcija
- ako je $0 < a < 1$, onda je f strogo padajuća funkcija



Najčešće se koriste:

- dekadski ili Briggsovi logaritmi ($a = 10$). Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se označava s $x \mapsto \log x$,
- prirodni ili Napierovi logaritmi ($a = e$). Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se označava s $x \mapsto \ln x$,
- diadski logaritmi ($a = 2$). Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se označava s $x \mapsto \mathrm{ld}\, x$.