Elementarne funkcije

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Racionalne funkcije

Definicija 1. Funkciju

$$Q(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0},$$

nazivamo racionalna funkcija. Ako je $m < n$ onda govorimo o pravoj racionalnoj funkciji, a ako je $m \geq n$ o nepravoj racionalnoj funkciji. Ako je $n = 0$, funkcija Q postaje polinom.

Teorem 1. *Svaku pravu racionalnu funkciju moguće je na jedinstven način prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka.*

Eksponencijalna funkcija

Definicija 2. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definiranu formulom

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

nazivamo eksponencijalna funkcija s bazom a.

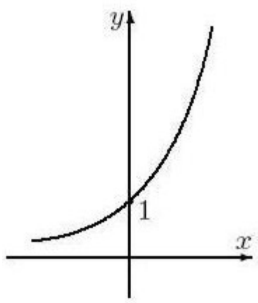
Svojstva eksponencijalne funkcije: za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi:

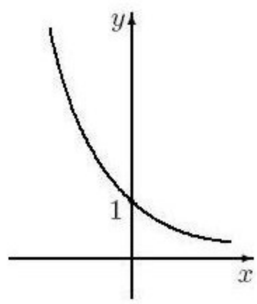
(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, tj. $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$

(ii) $f(x_1 - x_2) = \dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$, tj. $a^{x_1 - x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$

(iii) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$

- ako je $a > 1$, onda je f strogo rastuća funkcija
- ako je $0 < a < 1$, onda je f strogo padajuća funkcija





Primjer 1. *Riješimo eksponencijalnu jednadžbu* $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$.

Logaritamska funkcija

Definicija 3. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiranu formulom

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0$$

nazivamo logaritamska funkcija s bazom a.

Svojstva logaritamske funkcije: za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ vrijedi:

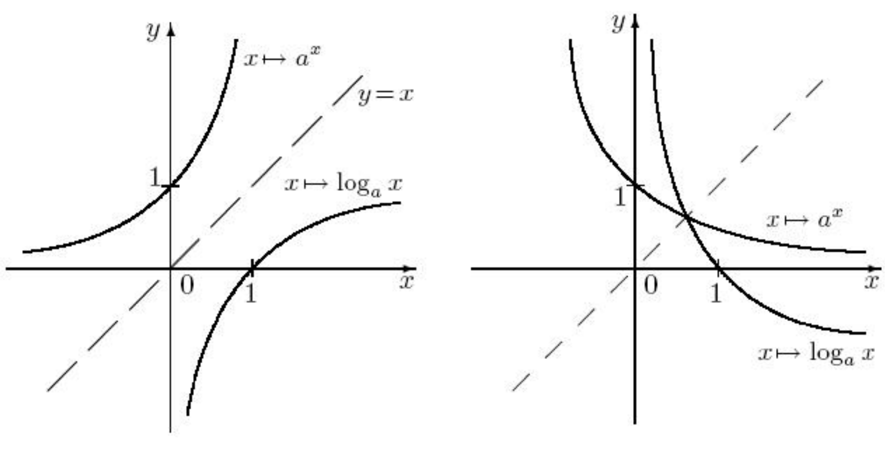
(i) $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, tj. $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(ii) $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$, tj. $\log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

(iii) $\log_a x_1^{x_2} = x_2 \log_a x_1$

(iv) $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

- ako je $a > 1$, onda je f strogo rastuća funkcija
- ako je $0 < a < 1$, onda je f strogo padajuća funkcija



Najčešće se koriste:

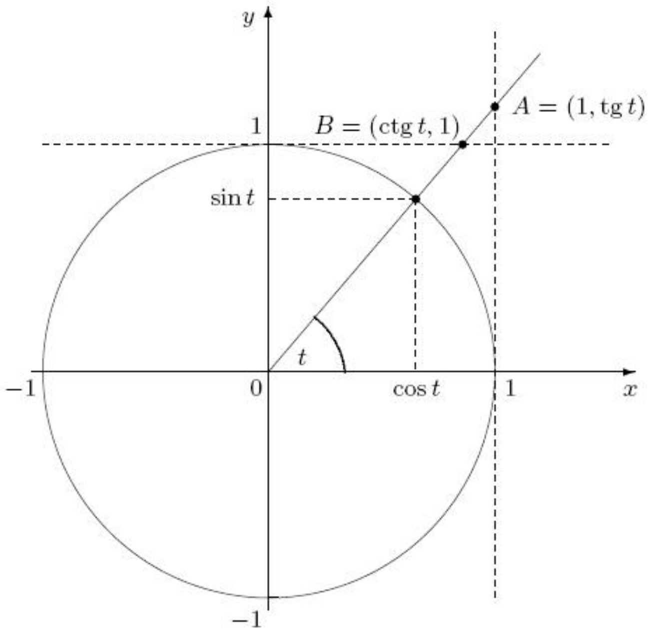
- dekadski ili Briggsovi logaritmi ($a = 10$). Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se označava s $x \mapsto \log x$,

- prirodni ili Napierovi logaritmi ($a = e$). Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se označava s $x \mapsto \ln x$,
- diadski logaritmi ($a = 2$). Odgovarajuća logaritamska funkcija jednostavno se označava s $x \mapsto \operatorname{ld} x$.

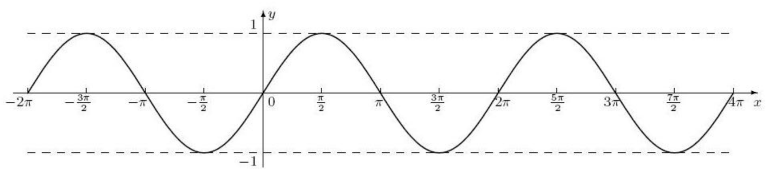
Primjer 2. *Riješimo logaritamsku jednadžbu* $\log_4(x+6) - \log_4(x-1) = \log_4 10 - \log_4 2$.

Trigonometrijske funkcije

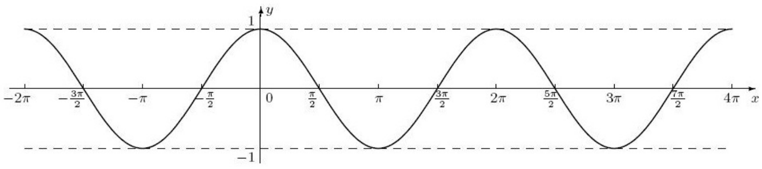
Trigonometrijska kružnica



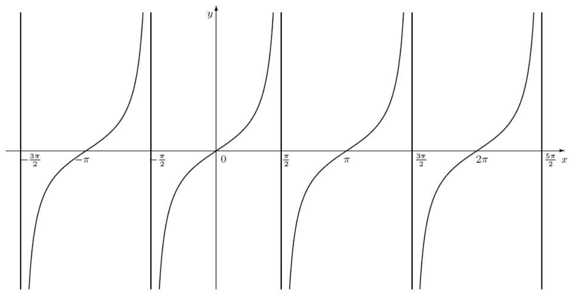
- $\sin x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



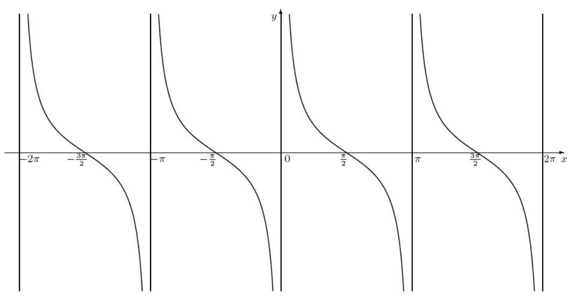
- $\cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



- $\operatorname{tg} x : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \to \mathbb{R}$



- $\operatorname{ctg} x : \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k\pi \} \to \mathbb{R}$



Svojstva

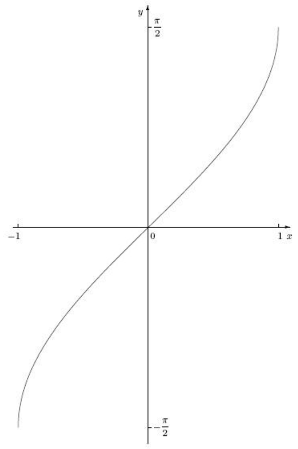
1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
   $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
   $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$
   $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$

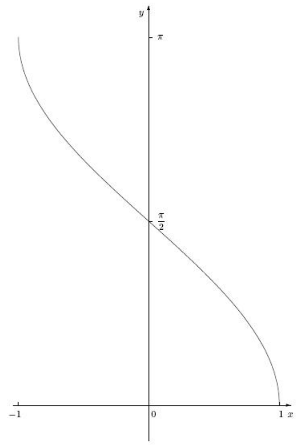
3. $\sin(-x) = -\sin x$
   $\cos(-x) = \cos x$
   $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
   $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

Ciklometrijske funkcije

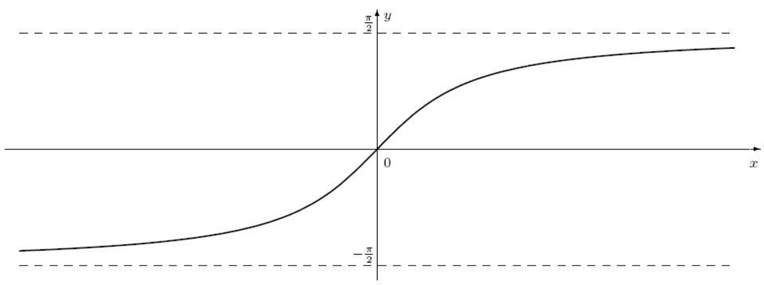
- $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



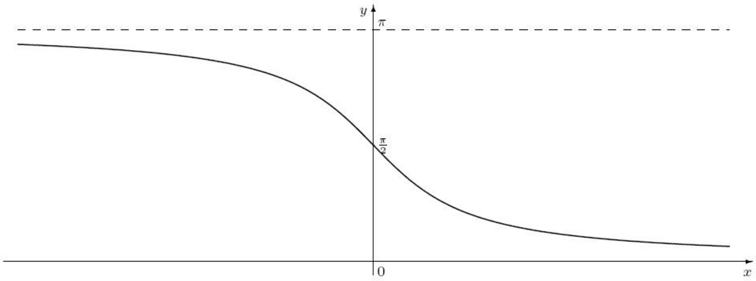
- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$



- $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



- $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle$



Primjer 3. *Riješimo trigonometrijsku jednadžbu* $\sin^2 x + 5\cos^2 x - 3 = -2\cos x$.

Nizovi realnih brojeva

Definicija 1. Funkciju $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazivamo niz realnih. Vrijednost $a(n)$ niza a na prirodnom broju n označava se s a_n i naziva $n-$ti ili opći član niza. Sam niz a označava se s (a_n) ili jednostavno $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Definicija 2. Neka su $a_1, d \in \mathbb{R}$. Niz realnih brojeva definiran formulom

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}$$

nazivamo aritmetički niz s diferencijom d.

- razlika susjednih članova je konstantna

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} \Longrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_{n+1} - a_n = d, \text{ tj. } a_{n+1} = a_n + d \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- zbroj prvih n članova

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Primjer 1. *Zadan je aritmetički niz* $2, 7, 12, 17, \dots$ *Odredimo* a_{2012}.

Definicija 3. Neka su $a_1, q \in \mathbb{R}$. Niz realnih brojeva definiran formulom

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

nazivamo geometrijski niz s kvocijentom q.

- kvocijent susjednih članova je konstantan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Longrightarrow a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \text{ tj. } a_{n+1} = a_n \cdot q$$

- zbroj prvih n članova

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n \cdot a_1, & q = 1 \end{cases}$$

Primjer 2. *Odredimo opći član geometrijskog niza* $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$