Nizovi realnih brojeva

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Definicija 1. Funkciju $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazivamo niz realnih. Vrijednost $a(n)$ niza a na prirodnom broju n označava se s a_n i naziva $n-$ti ili opći član niza. Sam niz a označava se s (a_n) ili jednostavno $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Definicija 2. Neka su $a_1, d \in \mathbb{R}$. Niz realnih brojeva definiran formulom

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}$$

nazivamo aritmetički niz s diferencijom d.

- razlika susjednih članova je konstantna

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} \Longrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_{n+1} - a_n = d, \text{ tj. } a_{n+1} = a_n + d \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- zbroj prvih n članova

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Primjer 1. *Zadan je aritmetički niz* $2, 7, 12, 17, \ldots$ *Odredimo* a_{2012}.

Definicija 3. Neka su $a_1, q \in \mathbb{R}$. Niz realnih brojeva definiran formulom

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

nazivamo geometrijski niz s kvocijentom q.

- kvocijent susjednih članova je konstantan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Longrightarrow a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \text{ tj. } a_{n+1} = a_n \cdot q$$

- zbroj prvih n članova

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n \cdot a_1, & q = 1 \end{cases}$$

Primjer 2. *Odredimo opći član geometrijskog niza* $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

Definicija 4. Niz realnih brojeva (a_n) je stacionaran ako postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n = a_{n_0}$ za svaki $n \geq n_0$.

Definicija 5. Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je monotono rastući ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (\forall n \geq n_0).$$

Definicija 6. Niz realnih brojeva (a_n) je monotono padajući ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$a_n \geq a_{n+1} \quad (\forall n \geq n_0).$$

Ukoliko u prethodnim definicijama vrijede stroge nejednakosti, onda govorimo o strogo rastućem odnosno strogo padajućem nizu.

Definicija 7. Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je omeđen odozgo ako je skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen odozgo.

Definicija 8. Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je omeđen odozdo ako je skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen odozdo.

Definicija 9. Za niz koji je omeđen i odozgo i odozdo kažemo da je omeđen.

Limes niza realnih brojeva

Definicija 10. Kažemo da je realan broj a gomilište ili točka gomilanja niza realnih brojeva (a_n) ako svaka $\varepsilon-$okolina broja a sadrži beskonačno mnogo članova niza (a_n).

Teorem 1. *(Bolzano − Weierstrass) Svaki omeđen niz realnih brojeva ima barem jedno gomilište.*

Definicija 11. Kažemo da je niz (a_n) konvergentan ako postoji realan broj a takav da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da:

$$(n > n_0) \Longrightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)$$

Broj a zovemo limes ili granična vrijednost niza (a_n) i pišemo:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{ili} \quad a_n \to a \ \text{ kada } \ n \to \infty.$$

Za niz koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.

Teorem 2.

(a) Svaki konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedan limes.

(b) *Konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedno gomilište. To je ujedno i njegov limes.*

Definicija 12. Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da divergira k $+\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako za svaki broj $M > 0$ postoji prirodan broj n_0, takav da $(n > n_0) \Rightarrow (a_n > M)$.

Definicija 13. Niz realnih brojeva (a_n) divergira k $-\infty$ i pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki broj $m < 0$ postoji prirodan broj n_0, takav da $(n > n_0) \Rightarrow (a_n < m)$.

Teorem 3. *Svaki konvergentan niz realnih brojeva je omeđen.*

Teorem 4. *Svaki omeđen i monoton niz realnih brojeva je konvergentan.*

Algebarske operacije s nizovima

Teorem 5. *Neka su nizovi realnih brojeva (a_n) i (b_n) konvergentni i neka je $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Tada:*

1. *niz $(a_n \pm b_n)$ je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

2. *niz $(a_n \cdot b_n)$ je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

3. *ako je $b_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $b \neq 0$, niz $\dfrac{a_n}{b_n}$ je konvergentan i vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Teorem 6. *Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Teorem 7. *Neka su (a_n), (b_n), (c_n) nizovi realnih brojeva i neka postoji prirodan broj n_1 takav da je*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad (n \geq n_1).$$

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, onda i niz (b_n) konvergira prema a, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.