Limes funkcije

radni nerecenzirani materijal za predavanja

Definicija 1. Kažemo da je $x_0 \in \mathbb{R}$ gomilište skupa $D \subseteq \mathbb{R}$, ako postoji niz (a_n), $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$, takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Skup svih gomilišta skupa D označavamo s D'. Točku iz skupa D koja nije gomilište skupa zovemo izolirana točka skupa D.

Primjer 1. *Skup svih gomolišta skupa $D = \langle 1, 7\rangle \cup \{19\}$ je skup $D' = [1, 7]$. Točka $x_0 = 19$ je izolirana točka skupa D.*

Definicija 2. Kažemo da je realni broj L limes ili granična vrijednost funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D'$, ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D$, takav da je $a_n \neq x_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ vrijedi

$$L = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Pišemo $L = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Ako je x_0 izolirana točka skupa D, onda za limes funkcije u točki x_0 uzmamo $f(x_0)$.

Primjer 2. *Zadana je funkcije $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ formulom:*

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x \in [0, 2] \\ 10, & x \in \langle 2, 4]. \end{cases}$$

Zanima nas postoji li limes funkcije f u točki $x_0 = 2$. U tu svrhu promatrajmo tri niza (a_n), (b_n), (c_n) iz $[0, 4]$, koji konvergiraju ka $x_0 = 2$, čiji opći članovi glase $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $b_n = 2 + \frac{1}{n}$ te $c_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5 = 5,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 10 = 10,$$

dok $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n)$ ne postoji jer je

$$f(c_n) = \begin{cases} 5, & \text{ako je } n \text{ neparan} \\ 10, & \text{ako je } n \text{ paran} \end{cases}$$

Prema tome funkcija f nema limes u točki $x_0 = 2$. Nije teško vidjeti da funkcija ima limes u svakoj točki iz skupa $a \in D \setminus \{2\}$ te da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Primjer 3. *Zadana je funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) = x^2$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljan realan broj. Uočimo da za svaki niz realnih brojeva (a_n), $a_n \neq x_0$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = x_0^2 = f(x_0)$. Prema tome funkcija f i ima limes u svakoj točki svoje domene te vrijedi*

$$L = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definicija 3. Kažemo da je realni broj L_- limes slijeva funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D'$, ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D$, takav da je $a_n < x_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ vrijedi $L_- = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$. Pišemo

$$L_- = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Ako je x_0 izolirana točka skupa D, onda za limes slijeva funkcije u točki x_0 uzmamo $f(x_0)$.

Definicija 4. Kažemo da je realni broj L_+ limes zdesna funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in D'$, ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D$, takav da je $a_n < x_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ vrijedi $L_+ = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$. Pišemo

$$L_+ = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Ako je x_0 izolirana točka skupa D, onda za limes zdesna funkcije u točki x_0 uzmamo $f(x_0)$.

Primjer 4. *Za funkciju f iz Primjera 2 vrijedi $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$ te $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 10$.*

Može se pokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja:

Teorem 1. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, ima limes L u točki $x_0 \in D'$, onda i samo onda ako postoje $L_- = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i $L_+ = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i vrijedi $L_- = L_+$.*

Definicija 5. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ u točki x_0 ima limes ∞, ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$. Pišemo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Definicija 6. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ u točki x_0 ima limes $-\infty$, ako za svaki niz (a_n), $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = -\infty$. Pišemo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Analogno se mogu definirati i limesi slijeva te limesi zdesna.

Primjer 5. *Izračunajmo sljedeće limese:*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ *b)*$\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{-(3-x)^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$ *f)* $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

Definicija 7. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima limes L u ∞, ako za svaki niz (a_n), $a_n \in \mathbb{R}$, takav da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = L$. Pišemo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

Definicija 8. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima limes L u $-\infty$, ako za svaki niz (a_n), $a_n \in \mathbb{R}$, takav da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = L$. Pišemo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Primjer 6. *Izračunajmo sljedeće limese:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+1) = \infty.$

Neki važni limesi

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1;$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1;$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

Može se pokazati da vrijede sljedeća pravila za računanje s limesima funkcija u točki:

Teorem 2. *Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq R$ te $x_0 \in D'$. Ako postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ te $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, onda je*

$$\textit{1)}\ \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\textit{2)}\ \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\textit{3)}\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

Prethodne formule vrijede za limese slijeva i zdesna te limesi u ∞.

Primjer 7. *Izračunajmo sljedeće limese*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4.$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x-3) = -1.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 7 \cdot \frac{\sin 7x}{7x} = 7$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(3x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 3 \cdot \frac{\ln(3x+1)}{3x} = 3$

f) $\lim\limits_{x\to 0} (1+8x)^{\frac{4}{x}} = e^{32}$