Asimptote i neprekidnost

radni nerecenzirani materijal za predavanja

Definicija 1. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kažemo da je pravac $y = kx + l$

a) desna kosa asimptota funkcije f, ako vrijedi

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - l) = 0;$$

b) lijeva kosa asimptota funkcije f, ako vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx - l) = 0.$$

c) obostrana kosa asimptota funkcije f, ako je ujedno desna i lijeva kosa asimptota.

Definicija 2. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kažemo da je pravac $y = l$

a) desna horizontalna asimptota funkcije f, ako vrijedi

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - l) = 0;$$

b) lijeva horizontalna asimptota funkcije f, ako vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - l) = 0.$$

c) obostrana asimptota funkcije f, ako je ujedno desna i lijeva horizontalna asimptota.

Može se pokazati da je pravac $y = kx + l$

a) desna kosa asimptota funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onda i samo onda ako vrijedi

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx);$$

ako je pri tome $k = 0$, onda pravac $y = l$ zovemo desna horizontalna asimptota

b) lijeva kosa asimptota funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ako vrijedi

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx),$$

ako je pri tome $k = 0$, onda pravac $y = l$ zovemo lijeva horizontalna asimptota

Definicija 3. Kažemo da je pravac $x = a$ vertikana asimptota funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, ako je

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \text{ ili } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ ili } \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \text{ ili } \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Primjer 1. *Odredimo asimptote funkcije* $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, *zadane formulom* $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

1) DESNA KOSA ASIMPTOTA *je pravac* $y = kx + l$, *pri čemu je*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2 - x} = 0, \quad l = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

Prema tome desna kosa asimptota ne postoji, no postoji desna horizontalna asimptota i ona glasi $y = 2$.

2) LIJEVA KOSA ASIMPTOTA *je pravac* $y = kx + l$, *pri čemu je*

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2 - x} = 0, \quad l = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-1} = 2.$$

Prema tome lijeva kosa asimptota ne postoji, no postoji lijeva horizontalna asimptota i ona glasi $y = 2$.

Konačno to znači da je pravac $y = 2$ *obostrana horizontalna asimptota.*

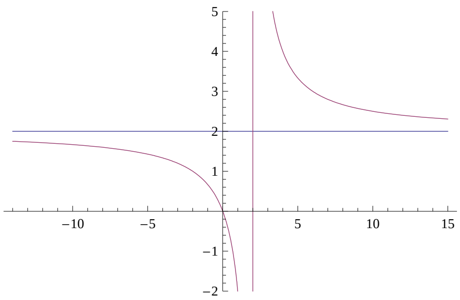
3) VERTIKALNA ASIMPTOTA *je pravac* $x = a$, *pri čemu je*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \text{ ili } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ ili } \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \text{ ili } \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Lako se vidi da je

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = \infty \text{ te } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = -\infty,$$

pa je stoga $x = 2$ *vertikalna asimptota.*



Slika 1: Graf funkcije f

Graf funkcije f *zajedno s asimptotama prikazan je na Slici1.*

Primjer 2. *Odredimo asimptote funkcije* $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, *zadane formulom* $f(x) = \frac{3-2x^2}{x-1}$.

1) DESNA KOSA ASIMPTOTA *je pravac $y = kx + l$, pri čemu je*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2x^2}{x^2-x} = -2, \quad l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2x}{x-1} = -2.$$

Prema tome desna kosa asimptota glasi $y = -2x - 2$.

2) LIJEVA KOSA ASIMPTOTA *je pravac $y = kx + l$, pri čemu je*

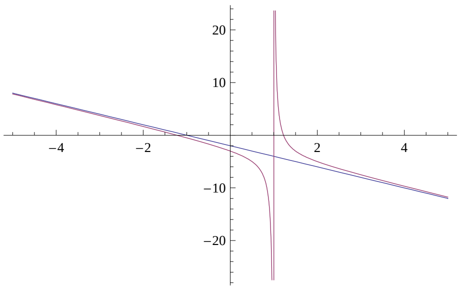
$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x^2}{x^2-x} = -2, \quad l = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{x-1} = -2.$$

Prema tome lijeva kosa asimptota glasi $y = -2x - 2$.

Konačno to znači da je pravac $y = -2x - 2$ obostrana kosa asimptota.

c) VERTIKALNA ASIMPTOTA *je pravac $x = 1$ zato što vrijedi*

$$\lim_{x\to 1^{-1}} f(x) = \lim_{x\to 1^{-1}} \frac{3-2x^2}{x-1} = -\infty \text{ te } \lim_{x\to 1^{+1}} f(x) = \lim_{x\to 1^{+}} \frac{3-2x^2}{x-1} = \infty.$$



Slika 2: Graf funkcije f

Graf funkcije f zajedno s asimptotama prikazan je na Slici2.

Primjer 3. *Odredimo asimptote funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadane formulom $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.*

1) DESNA KOSA ASIMPTOTA *je pravac $y = kx + l$, pri čemu je*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = 0.$$

Prema tome desna kosa asimptota glasi $y = x$.

2) LIJEVA KOSA ASIMPTOTA *je pravac $y = kx + l$, pri čemu je*

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1$$

$$l = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = 0.$$

Prema tome lijeva kosa asimptota glasi $y = -x$.

Nije teško vidjeti da vekrtikalnih asimptota nema.

Definicija 4. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $a \in D$ ako postoji $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ te vrijedi

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Funkcija f je neprekidna na D ako je neprekidna u svokoj toćki skupa D.

Primjer 4. *Ispitajmo neprekidnost funkcije $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ formulom:*

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x \in [0,2] \\ 10, & x \in \langle 2,4]. \end{cases}.$$

Na prošlom predavanju smo pokazali da $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ne postoji pa prema tome funkcija nije neprekidna u $x_0 = 2$. Lako se vidi da je u ostalim točkama domene funkcija neprekidna.

Primjer 5. *Ispitajmo neprekidnost funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x < -1 \\ -2, & x \geq -1 \end{cases}.$$

Kako je

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-1}{x+1} = -2 \text{ te } \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-1}{x+1} = -2,$$

limes funkcije f u točki $x_0 = 2$ postoji. No osim što postoji jednak je vrijednosti funkcije u točki -2 tj. vrijedi

$$\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1),$$

što znači da je funkcija neprekidna u točki $x_0 = -1$. Lako se vidi da je u ostalim točkama domene funkcija neprekidna.

Primjer 6. *Odredimo parametar $A \in \mathbb{R}$ tako da funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2}, & x < -2 \\ A, & x \geq -2 \end{cases},$$

bude neprekidna u točki $x_0 = -2$. Slično kao u prethodnom zadatku može se pokazati da je $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -4$, odakle slijedi da je $A = -4$.

Vrijede sljedeća četiri teorema:

Teorem 1. *Neka su* $f, g : D \to \mathbb{R}$ *neprekidne funkcije u* $x_0 \in D$*. Onda su i funkcije* $f \pm g$ *i* $f \cdot g$ *neprekidne na* D*. Ako je* $g(x_0) \neq 0$*, onda je* $\frac{f}{g}$ *neprekidna u točki* x_0*.*

Teorem 2. *Sve elementarne funkcije su neprekidne na svojij domeni.*

Teorem 3. *Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.*

Teorem 4. *Ako su* f, g *neprekidne funkcije na svojoj domeni i ako je* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$*, onda je*

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(g(x_0)).$$

Primjer 7. *Primjenom prethodnog teorema riješimo limes*

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije $x \mapsto \ln x$ *(vidi Teorem 2), vrijedi*

$$L = \lim_{x \to 0} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$