Derivacije

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Definicija 1. Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ako limes (1) ne postoji, onda kažemo da funkcija f nije derivabilna u točki x_0. Ako je funkcija f derivabilna u točki x_0, onda realan broj (1) zovemo derivacija funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$, tj.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Supstitucijom $\Delta x = x - x_0$, formula (1) prelazi u ekvivalentnu formulu

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Definicija 2. Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, onda kažemo da je ona derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Funkciju $x \mapsto f'(x)$ definiranu na $\langle a, b\rangle$ označavamo s f' i nazivamo derivacijom funkcije f na $\langle a, b\rangle$.

Primjer 1. *Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Ispitajte derivabilnost funkcije f u proizvoljnoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Zadatak ćemo riješiti koristeći formulu (2). Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0.
\end{aligned}$$

Dakle funkcija f je derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Primjer 2. *Ispitajte derivabilnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ u točki $x_0 = 0$. Računamo $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ Kako je*

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0, \end{cases}$$

slijedi da $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ ne postoji, pa prema tome funkcija f nije derivabilna u $x_0 = 0$.

Definicija 3. Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna slijeva u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{3}$$

Ako je funkcija derivabilna s lijeva, onda limes (3) označavamo s $f'_-(x_0)$ i zovemo derivacija slijeva u točki x_0.

Definicija 4. Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna zdesna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{4}$$

Ako je funkcija derivabilna s lijeva, onda limes (4) označavamo s $f'_+(x_0)$ i zovemo derivacija zdesna u točki x_0.

Primjer 3. *Za funkciju f iz Primjera 2 vrijedi*

$$f'_-(0) = -1 \quad f'_+(0) = 1.$$

Teorem 1. *Ako su $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije u točki $x \in \langle a, b\rangle$, onda su i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$ derivabilne u x. Ako je $g(x) \neq 0$, na nekoj okolini od x, onda je $\frac{f}{g}$ derivabilna u x. Također ako je definirana kompozicija $f \circ g$ na $\langle a, b\rangle$, onda je $f \circ g$ derivabilna u x i vrijede sljedeća pravila:*

1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$,

4) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Može se pokazati da su sljedeće funkcije derivabilne te da vrijede formule:

Tablica derivacija elementarnih funkcija

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0, \quad c \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &= \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \left(= \frac{1}{x} \log_a e\right), \quad x > 0 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0 \\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\,\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Primjer 4. *Derivirajmo sljedeće funkcije*

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1,\ f'(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x^7} - 1, \quad f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{7}{5}} - 1\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}},$

c) $h(x) = (x^2+1)^2,\ h'(x) = (x^4 + 2x^2 + 1)' = 4x^3 + 4x$

d) $h(x) = (x^2+1)^{2010},\ f(x) = x^{2010},\ g(x) = x^2 + 1,$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 2010(x^2+1)^{2009} \cdot 2x = 4020x(x^2+1)^{2009}.$$

e) $f(x) = xe^x,\ f'(x) = e^x + xe^x.$

f) $f(x) = \frac{x+1}{x+2},\ f'(x) = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$

Logaritamska derivacija

Pretpostavimo da treba odrediti derivaciju funkcije $f(x) = u(x)^{v(x)}$. Logaritmiranjem dobivamo

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x),$$

odakle je

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x),$$

te

$$f'(x) = f(x) \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x) \right).$$

Primjer 5. *Derivacija funkcije $f(x) = x^x$ dobivamo na sljedeći način:*

$$\ln f(x) = x \ln x,$$

odakle je $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$.