Derivacije višeg reda

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Ako je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna na $\langle a, b\rangle$, onda svakom $x \in \langle a, b\rangle$ možemo jednoznačno pridružiti derivaciju funkcije f u točki x, odnosno broj $f'(x)$, tj. dobro je definirana funkcija $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, koju zovemo derivacija funkcije f na $\langle a, b\rangle$. Nadalje, ako je funkcija f' derivabilna na $\langle a, b\rangle$, onda svakom $x \in \langle a, b\rangle$, možemo jednoznačno pridružiti $f''(x)$, tj. dobro je definirana funkcija $f'' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, koju zovemo druga derivacija funkcije f na $\langle a, b\rangle$.

Primjer 1. *Ako je* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$, *onda je*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}, \\ f''(x) &= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x^2-6x)(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Monotonost i derivacija

Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Onda vrijedi:

1) Funkcija f je monotono rastuća na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

2) Funkcija f je monotono padajuća na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

Primjer 2. *Funkcija f iz Primjera 1 je monotono rastuća za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $f'(x) \geq 0$, odnosno za koje je $\frac{x^2-6x}{(x-3)^2} \geq 0$, tj. $x \in \langle -\infty, 0] \cup [6, +\infty\rangle$. Slično, funkcija f je monotono padajuća za $x \in [0, 6] \setminus \{3\}$. Također, uočavamo da funkcija f u $x_1 = 0$ postiže lokalni maksimum te u $x_2 = 6$ postiže lokalni minimum.*

Područja monotonosti funkcije obično se prikazuju ovakvom tablicom, koju zovemo tablica monotonosti

	$\langle -\infty, 0]$	$[0, 3]$	$[3, 6]$	$[6, \infty\rangle$
f'	+	-	-	+
f	*MR*	*MP*	*MP*	*MR*

Lokalni ekstremi i derivacija

Teorem 1. (Fermatov teorem) *Ako funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ u $x_0 \in \langle a, b\rangle$ u x_0 postiže lokalni ekstrem te ako je f derivabilna u x_0, onda je $f'(x_0) = 0$.*

Obrat Fermatovog teorem ne vrijedi. Naime funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ u $x_0 = 0$ ne postiže lokalni ekstrem, no vrijedi $f'(0) = 0$.

U svrhu oderđivanja lokalnih ekstrema funkcije koristimo sljedeći teorem.

Teorem 2. *Ako je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna na $\langle a, b\rangle$, onda f u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ postiže*

1) *lokalni minimum, ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$;*

2) *lokalni maksimum, ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$.*

Primjer 3. *Lokalni ekstremi funkcije f iz Primjera 1 postižu se u točkama $x_1 = 0$ te $x_2 = 6$, jer je $f'(0) = f'(6) = 0$. Osim toga $f''(0) = -\frac{18}{27} < 0$, funkcija f u $x_1 = 0$ postiže lokalni maksimum, dok zbog $f''(6) = \frac{18}{27} > 0$, funkcija f u $x_2 = 6$ postiže lokalni minimum.*

Konveksnost i druga derivacija

Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Onda vrijedi

1) f je konveksna na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

2) f je konkavna na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

Primjer 4. *Funkcija f iz Primjera 1 je konveksna na intervalu na kojemu je $f''(x) \geq 0$, odnosno za sve one $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\frac{18}{(x-3)^3} \geq 0$, odnosno $x \in \langle 3, +\infty\rangle$. Slično, funkcija f je monotono padajuća za $x \in \langle -\infty, -3\rangle$.*

Područja konveksnosti i konkavnosti funkcije obično se prikazuju ovakvom tablicom, koju zovemo tablica konveksnosti i konkavnosti

	$\langle -\infty, 3\rangle$	$\langle 3, \infty\rangle$
f''	-	+
f	*Konkavna*	*Konveksna*

Primjer 5. *Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. Kako je $f''(x) = e^{-x^2}(-2 + 4x^2)$. Funkcija f je konkveskna za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $f''(x) \geq 0$, odnosno za koje je $e^{-x^2}(-2 + 4x^2) \geq 0$, odakle slijedi da je $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\rangle$. Slično f je konkavna za $x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Također uočavamo da $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ točke infleksije funkcije f.*