

Vježbe 1

Infimum i supremum skupa

Realan broj M [m] nazivamo supremum [infimum] skupa S ako ima sljedeća dva svojstva

- i) M [m] je majoranta [minoranta] od S , tj. $x \leq M$ [$x \geq m$] za svako $x \in S$;
- ii) M [m] je najmanja majoranta [najveća minoranta] od S , tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $M - \varepsilon < x_0$ [$m + \varepsilon > x_0$].

Supremum [infimum] skupa S označavamo $\sup S$ [$\inf S$].

Ako je $\sup S \in S$ [$\inf S \in S$] nazivamo ga maksimalnim [minimalnim] elementom skupa S i označavamo s $\max S$ [$\min S$].

1. Odredite infimum i supremum skupa: $S = \langle -3, 1 \rangle \cup [2, 5] \cup \{7\}$,
Rj. a) $\inf S = -3$, $\sup S = 7$
2. Odredite infimum i supremum skupa. Da li skup ima minimalni element? Da li skup ima maksimalni element?

(a) $S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\} \cup \{3\}$,

(b) $S = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq 6\} \cup \{-8\}$

Rj. a) $\inf S = -2$; $\sup S = 3 \in S \Rightarrow \max S = 3$

b) $\sup S = 6 \in S \Rightarrow \max S = 6$; $\inf S = -8 \in S \Rightarrow \min S = -8$

3. Zadan je skup

$$S = \left\{ \frac{5n-3}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ispitajte je li skup S omeđen te ako je odrediti $\inf S$ i $\sup S$.

Rj. S je omeđen i $\inf S = \frac{2}{3}$, $\sup S = 5$.

Apsolutna vrijednost realnog broja

Definicija 1. Apsolutna vrijednost realnog broja x , u oznaci $|x|$ je broj

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Svojstva

- 1) $|-x| = |x|$
- 2) $x \leq |x|$
- 3) $|xy| = |x||y|$
- 4) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$
- 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$
- 6) $|x - y| \leq |x| + |y|$
- 7) $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
- 8) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

4. Izračunajte:

(a) $\frac{2}{|1 - \sqrt{3}| - |3 - \sqrt{3}|},$
Rj. $-2 - \sqrt{3},$

(b) $\frac{|\sqrt{2} - 2| - |\sqrt{18} - 4|}{|1 - \sqrt{2}| + |3 - \sqrt{8}|},$
Rj: $2 - \sqrt{2}.$

5. Pojednostavite izraze:

(a) $\frac{(|x| - 1)(x - 1)}{x^2 - 2|x| + 1}$
Rj. $\frac{(|x| - 1)(x - 1)}{x^2 - 2|x| + 1} = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \quad x \neq 1 \\ -\frac{x-1}{x+1}, & x < 0, \quad x \neq -1 \end{cases}.$

6. Skicirajte graf funkcije

- (a) $f(x) = |x - 2|,$
- (b) $f(x) = |x + 2| + |3 - x|.$

Linearne jednačbe i nejednačbe

7. Riješite jednačbu $|2x + 3| - 4x = 0$.
Rj. $x = \frac{3}{2}$.
8. Riješite jednačbu $|x + 1| - |2x + 3| = 2$.
Rj. nema rješenja.
9. Riješite jednačbu $|2x + 1| + 1 - |x - 3| = 0$.
Rj. $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{3}$.
10. Riješite nejednačbu $|x + 1| < 3$.
Rj. $x \in \langle -4, 2 \rangle$.
11. Riješite nejednačbu $|2x + 3| + |x + 3| \leq 2$.
Rj. $x \in [-2, -\frac{4}{3}]$.
12. Riješite nejednačbu $|3x + 1| + 2x > |4x + 5| - 1$.