

Vježbe 5

Limes niza

Neki značajni limesi

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{f(n)}\right)^{\beta f(n)} = e^{\alpha\beta}$, za svaki niz funkcijskih vrijednosti $f(n)$ koji divergira prema $\pm\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$

1. Odredite sva gomilišta sljedećih nizova:

(a) $a_n = \frac{5 + (-1)^n}{2}$, Rj.: 2, 3

(b) $a_n = \frac{6n + 1}{3n - 2} + \sin \frac{n\pi}{2}$. Rj.: 1, 2, 3

2. Izračunajte sljedeće limese:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - n^2 + 10}{n^2 + n + 1}$, Rj.: ∞

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 5n^4 + 11n}{n^7 + n^3 - 3n^2}$, Rj.: 0

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n - 1}{5n^2 - 7n + 12}\right)^3$, Rj.: $\frac{8}{125}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7 + 4n^5} - n^4}{7n + 8 + \sqrt{5n^8 + 9n^4}}$, Rj.: $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, Rj.: 0

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}$, Rj.: 3

3. Izračunajte sljedeće limese:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 10^n}{1 + 10^{n+1}}$, Rj.: $-\frac{1}{10}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$, Rj.: 3

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n + 7^n}{3^n - 5 \cdot 7^{n-1}}$. Rj.: $-\frac{7}{5}$

4. Izračunajte sljedeće limese:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n, \quad \text{Rj.: } e^2$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{2n+1}, \quad \text{Rj.: } \frac{1}{e^2}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+1) - \ln n), \quad \text{Rj.: } 1$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2+1} \right)^{3n^2}. \quad \text{Rj.: } e^3$$