

Vježbe 10

Matrice

1. Zbrojite matrice

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix},$$

(b)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix},$$

(c)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 1 & -9 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & 8 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$(a) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -1 & 5 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad \mathbf{C} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 7 \\ 13 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad \mathbf{G} + \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 11 & 9 & -12 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Skalarima $\alpha = 4$ i $\beta = -3$ pomnožite matricu

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 12 & 6 \\ 5 & 7 & -20 \end{bmatrix},$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 10 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$(a) 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -12 & -4 \\ 16 & 48 & 24 \\ 20 & 28 & -80 \end{bmatrix}, \quad -3 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 3 \\ -12 & -36 & -18 \\ -15 & -21 & 60 \end{bmatrix}.$$

$$(b) 4 \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 12 & -16 & 40 \\ 4 & -20 & 8 \\ 12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad -3 \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 12 & -30 \\ -3 & 15 & -6 \\ -9 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Neka je dana matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 20 \end{bmatrix}$. Izračunajte zbroj matrice \mathbf{A} i matrice \mathbf{B} , ako je poznato da su elementi prvog stupca matrice \mathbf{B} dva puta veći od odgovarajućih elemenata prvog stupca matrice \mathbf{A} , a elementi drugog stupca matrice \mathbf{B} su za 25% veći od odgovarajućih elemenata drugog stupca matrice \mathbf{A} .

Rješenje. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ -3 & 45 \end{bmatrix}$.

4. Za matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 30 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix},$$

izračunajte:

- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, (c) \mathbf{AB} , (d) \mathbf{BA} .

Rješenje.

$$(a) \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 8 & 34 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 26 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -34 & -14 \\ 144 & 135 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 11 & 162 \\ 22 & 90 \end{bmatrix}.$$

5. Za matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

izračunajte:

- (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, (c) \mathbf{AB} , (d) \mathbf{BA} .

Rješenje.

$$(a) \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 16 & 7 \\ 1 & -8 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -14 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -16 & 37 & 26 \\ -27 & 8 & 4 \\ 11 & 37 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -7 & 70 & 63 \\ 13 & 21 & -4 \\ 2 & -6 & -16 \end{bmatrix}.$$

6. Za matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

izračunajte:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, (c) \mathbf{AB} , (d) \mathbf{BA} .

Rješenje.

$$(a) \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 15 & 4 \\ 7 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 20 & 100 & 47 \\ -10 & 46 & 15 \\ -5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 23 & -22 & -2 \\ 46 & 28 & 22 \\ 28 & 16 & 12 \end{bmatrix}.$$

7. Izračunajte sljedeće produkte matrica

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ -15 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(b) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 6 & -7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 7 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ -15 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 51 \\ -79 & -10 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 13 \\ 6 & -7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \begin{bmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 7 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -20 & 46 \\ -4 & -20 \end{bmatrix}.$$

Neke specijalne matrice

8. Izračunajte trag sljedećih matrica:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 44 & -15 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}, (b) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & -54 \\ -3 & -18 & 4 \\ 4 & 75 & -9 \end{bmatrix}, (c) \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 19 & -35 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & 5 \\ 8 & 0 & -22 & 4 \\ -473 & -101 & 250 & 4 \end{bmatrix},$$

$$(d) \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & -87 \\ 18 & -44 \end{bmatrix}, (e) \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 9 & 35 & 23 \\ 56 & 17 & 8 \\ 5 & 8 & -14 \end{bmatrix}, (f) \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 18 & 37 \\ 7 & 10 & 0 & -7 \\ 4 & -12 & 6 & 96 \\ 6 & 9 & -42 & 50 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

(a) $\text{tr}\mathbf{A} = 35,$

(b) $\text{tr}\mathbf{B} = -18,$

(c) $\text{tr}\mathbf{C} = -16,$

(d) $\text{tr}\mathbf{D} = -40,$

(e) $\text{tr}\mathbf{E} = 12,$

(f) $\text{tr}\mathbf{F} = 60.$

9. Transponirajte sljedeće matrice, te provjerite jesu li simetrične, antisimetrične ili niti jedno od navedenog.

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}, (b) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 12 \\ -3 & 0 & 9 \\ -12 & -9 & 0 \end{bmatrix}, (c) \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ -18 & 1 & 0 \\ 32 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(d) \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 19 & -3 \\ -19 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad (e) \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ -8 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad (f) \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 18 & 9 & -5 \\ 9 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$(g) \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

- (a) Matrica \mathbf{A} je simetrična.
- (b) Matrica \mathbf{B} je antisimetrična.
- (c) Matrica \mathbf{C} nije niti simetrična, niti antisimetrična.
- (d) Matrica \mathbf{A} je antisimetrična.
- (e) Matrica \mathbf{B} nije niti simetrična, niti antisimetrična.
- (f) Matrica \mathbf{C} je simetrična.
- (g) Matrica \mathbf{G} nije niti simetrična, niti antisimetrična.

10. Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte \mathbf{AB}^T i $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$.

Rješenje. $\mathbf{AB}^T = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$