Vježbe 11

Regularne matrice

1. Gaussovom metodom nađite inverz sljedećih matrica:

   (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,

   (c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, (d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$.

   Rješenje.

   (a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.

   (b) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$.

   (d) $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Gaussovom metodom nađite inverz sljedećih matrica:

   (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

   (c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$, (d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

   Rješenje.

   (a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

   (b) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 \\ 6 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

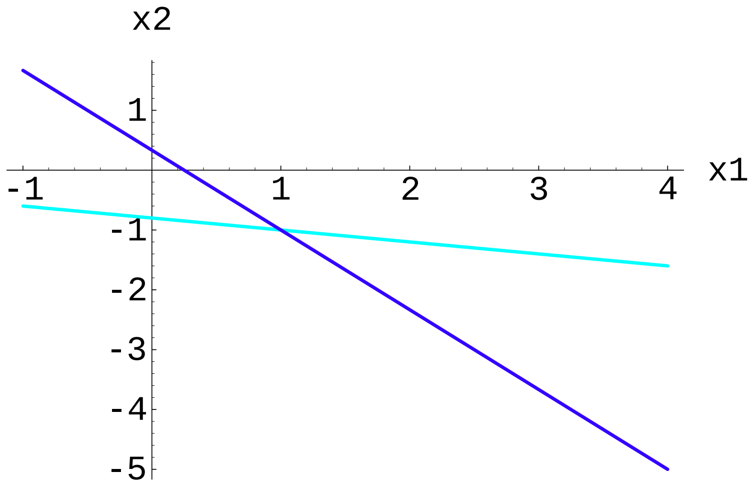
   (d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -5 & 3 \\ -6 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Sljedeće sustave linearnih algebarskih jednadžbi prikažite grafički, te iz slike odredite rješenja i objasnite njihov geometrijski smisao:

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \\ -x_1 & - & 5x_2 & = & 4 \end{array}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & = & 8 \end{array}.$$

Rješenje.

a)

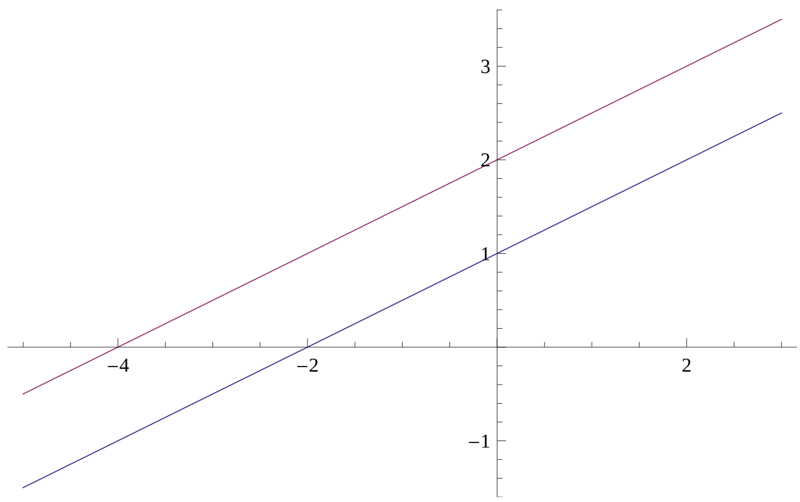


Slika 1: Rješenje sustava a)

Geometrijski smisao rješenja ovog sustava prikazan je na Slici 1. Rješenje je sjecište pravaca zadanih jednadžbama sustava i lako, sa slike, možemo iščitati da je to $(x_1, x_2) = (1, -1)$.

b)

Out[2]=



Slika 2: Rješenje sustava b)

Geometrijski smisao rješenja ovog sustava prikazan je na Slici 2. Vidimo da se pravci koji odgovaraju jednadžbama sustava ne sijeku. Dakle, sustav nema rješenje, jer nema takvih parova (x_1, x_2) koji bi istovremeno zadovoljavali obje jednadžbe sustava.

Gaussova metoda eliminacije za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednažbi

4. Gaussovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \end{array},$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & -1 \end{array},$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcl} & & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 9 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \end{array},$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & - & 4x_3 & = & -1 \\ & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Rješenje.

(a) $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$.

(b) $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, -1)$.

(c) $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, 0)$.

(d) $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$.

5. Gaussovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} & & 4x_2 & + & x_3 & = & 19 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 8 \end{array},$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}.$$

Rješenje.

(a) $(x_1, x_2, x_3) = (2, 5, -1)$.

(b) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2)$.