Vježbe 12

Determinante

1. Izračunajte sljedeće determinante matrica prvog reda:

   (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -43 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 125 \end{bmatrix}$, (c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -16 \end{bmatrix}$.

   Rješenje.

   (a) $\det \mathbf{A} = -43$.

   (b) $\det \mathbf{B} = 125$.

   (c) $\det \mathbf{C} = -16$.

2. Izračunajte sljedeće determinante matrica drugog reda:

   (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 9 & -18 \\ 5 & 18 \end{bmatrix}$.

   Rješenje.

   (a) $\det \mathbf{A} = 52$.

   (b) $\det \mathbf{D} = 252$.

3. Izračunajte sljedeće determinante matrica trećeg reda:

   (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$,

   (c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, (d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$,

   (e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 14 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, (f) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

   Rješenje.

   (a) $\det \mathbf{A} = -36$.

   (b) $\det \mathbf{B} = 40$.

   (c) $\det \mathbf{C} = 0$.

   (d) $\det \mathbf{D} = 0$.

   (e) $\det \mathbf{E} = 0$.

   (f) $\det \mathbf{F} = 0$.

4. Laplaceovim razvojem izračunajte determinante sljedećih matrica:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, (d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

(a) $\det\mathbf{A} = 8$.

(b) $\det\mathbf{B} = -45$.

(c) $\det\mathbf{C} = 171$.

(d) $\det\mathbf{D} = -164$.

5. Laplaceovim razvojem izračunajte determinante sljedećih matrica:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

(a) $\det\mathbf{A} = 20$.

(b) $\det\mathbf{B} = -4$.

6. Izračunajte

(a) $\det(\mathbf{AB})$,

(b) $\det(\mathbf{CD})$,

pri čemu su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, matrice iz 4. zadatka. Provjerite li jesu li matrice $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{CD}$ regularne, te izračunajte determinante njihovih inverznih matrica.

Rješenje.

(a) $\det(\mathbf{AB}) = -360$.

(b) $\det(\mathbf{CD}) = 4674$.
Kako je $\det(\mathbf{AB}) \neq 0$ i $\det(\mathbf{CD}) \neq 0$, prema svojstvu determinante D.12 slijedi da su matrice $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{CD}$ regularne. Nadalje je $\det(\mathbf{AB})^{-1} = \frac{-1}{360}$, $\det(\mathbf{CD})^{-1} = \frac{1}{4674}$.

Cramerovo pravilo

7. Primjenom Cramerovog pravila diskutirajte rješenja sljedećih sustava jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$

   (a) $\begin{array}{rcl} \lambda x_1 + 3x_2 & = & 1 \\ 3x_1 + \lambda x_2 & = & 1 \end{array}$,

   (b) $\begin{array}{rcl} \lambda x_1 + 2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 & = & 4 \end{array}$.

   Rješenje.

   (a) Sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = x_2 = \frac{1}{\lambda+3}$ za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, za $\lambda = 3$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja leže na pravcu $3x_1 + 3x_2 = 1$, a za $\lambda = -3$ sustav nema rješenja.

   (b) Za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ sustav ima jedinstveno rjeenje, a za $\lambda \in \{-2, 2\}$ sustav nema rješenje.

8. Cramerovim pravilom riješite sljedeće sustave:

   (a) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \end{array}$,

   (b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$,

   (c) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ 9x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$.

   Rješenje.

   (a) $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1 - 2)$.

   (b) Sustav nema rješenje.

   (c) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

9. Cramerovim pravilom riješite sljedeće sustave:

   (a) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & -1 \end{array}$,

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 14 \\ & & & & 2x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array},$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 1 \\ & & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array},$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -3 \\ & & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & & & & & = & 3 \end{array}.$$

Rješenje.

(a) $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 2, 0)$.

(b) $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 2)$.

(c) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 0)$.

(d) $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, -2)$.