

Vježbe 6

Limes funkcije

Neki značajni limesi funkcije u točki:

$$1.) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad 2.) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$3.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad 4.) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$5.) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha f(x))^{\frac{\beta}{f(x)}} = e^{\alpha\beta}, \text{ za sve } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ i za svaku funkciju } f \text{ za koju je}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Tvrđnja: Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ima limes L u točki $a \in D'$ (D' je skup svih gomilišta skupa D) onda i samo onda ako ona u točki a ima i limes slijeva i limes zdesna koji iznose L .

1. Izračunajte sljedeće limese:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 5}{2x^2 + 7x + 1}, \quad \text{Rj. } -5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x + 6}, \quad \text{Rj. } -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 11} \frac{3 - \sqrt{x-2}}{x^2 - 121}, \quad \text{Rj. } -\frac{1}{132}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}, \quad \text{Rj. } \frac{1}{10}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{4}}{x - 4}. \quad \text{Rj. } \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}$$

2. Izračunajte sljedeće limese:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}, \quad \text{Rj. } \frac{3}{5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x - \sin x}{x}, \quad \text{Rj. } -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1}, \quad \text{Rj. } 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{x}, \quad \text{Rj. } 5$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{9x}. \quad \text{Rj. } \frac{2}{9}$$

3. Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x-5} \right)^{\frac{1}{x+1}}$, Rj. $-\frac{2}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x^2)^{\frac{5}{x^2}}$, Rj. e^{15}

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x}$. Rj. $\frac{1}{2}$

4. Ispitajte postoji li limes funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ zadane formulom $f(x) = \frac{|x|}{x}$ u točki $a = 0$.

Uputa: Zadatak riješimo primjenom prethodne tvrdnje računajući limes slijeva i zdesna u 0. Traženi limes ne postoji.

5. Izračunajte limese:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-3}$, Rj. $+\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{5}{4-x}$. Rj. $+\infty$

6. Za funkciju $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ zadanu formulom $f(x) = \frac{1}{3x}$ izračunajte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, Rj. 0

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, Rj. $+\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, Rj. 1

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Rj. 1