Vježbe 7

Asimptote funkcije

Definicija:
Pravac $y = kx + l$ zovemo **desna kosa asimptota** funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + l)) = 0.$$

Koefcijenti k i l desne kose asimptote iznose

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Pravac $y = kx + l$ zovemo **lijeva kosa asimptota** funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + l)) = 0.$$

Koefcijenti k i l lijeve kose asimptote iznose

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad l = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx).$$

Specijalno, za $k = 0$ pravac $y = l$ zovemo **horizontalna asimptota**.
Pravac $x = a$ zovemo **vertikalna asimptota** funkcije f ako je barem jedan od limesa

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ ili } \lim_{x\to a^+} f(x)$$

jednak $+\infty$ ili $-\infty$.

1. Odredite asimptote sljedećih funkcija:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$

   Rj. Vertikalna a. je pravac $x = 4$, lijeva i desna kosa a. je pravac $y = x + 4$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$

   Rj. Vertikalne a. su pravci $x = -3$ i $x = 1$, horizontalna a. je pravac $y = 0$.

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x}$

   Rj. Vertikalne a. su pravci $x = 0$ i $x = -2$, horizontalna a. je pravac $y = 1$.

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2-5x}{x^2-5x+4}$

   Rj. Vertikalne a. su pravci $x = 1$ i $x = 4$, horizontalna a. je pravac $y = 1$.

   (e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

   Rj. Vertikalna a. je pravac $x = 0$, horizontalna a. je pravac $y = 1$.

2. Krivulja $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ prolazi točkom $T = (1,3)$, ima vertikalnu asimptotu $x = 2$ i horizontalnu asimptotu $y = 1$. Odredite parametre a, b, c i d.

Rj. $a = 1,\ b = -4,\ c = 1,\ d = -2.$

Neprekidnost funkcije

Definicija:

Funkcija $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $x_0 \in \langle a,b\rangle$ ako ima limes u točki x_0 koji je jednak $f(x_0)$, odnosno ako je

$$\lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = \lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = f(x_0).$$

Funkcija $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je neprekidna na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako je neprekidna u svakoj točki intervala $\langle a,b\rangle$.

3. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 3 \\ 2x-1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Odredite točke prekida. Rj. Točka prekida je $x_0 = 3$.

4. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2. \end{cases}$$

Ispitajte neprekidnost funkcije f u točki $x_0 = 2$. Rj. Funkcija f nije neprekidna u točki $x_0 = 2$.

5. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq -1 \\ 2x^2, & -1 < x < 1 \\ 5-3x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Ispitajte neprekidnost funkcije f u u točkama $x_0 = -1$ i $x_1 = 1$? Rj. Funkcija ima prekid u $x_0 = -1$.

6. Odredite parametar a tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \leq 1 \\ x - a, & x > 1 \end{cases}$$

bude neprekidna u svakoj točki svoje domene. Rj. $a = -1$.

7. Odredite parametar a tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 3x^2 - 2x - a, & x \geq 0 \end{cases}$$

bude neprekidna u svakoj točki svoje domene. Rj. $a = -1$.

8. Odredite parametar a tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 0 \\ (1 + x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna u svakoj točki svoje domene. Rj. $a = e$.