Vježbe 8

Derivacije

Definicija: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in I$, ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ako limes (1) ne postoji, onda kažemo da funkcija f nije derivabilna u točki x_0. Ako je funkcija f derivabilna u točki x_0, onda realan broj (1) zovemo derivacija funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f'(x_0)$.
Supstitucijom $\Delta x = x - x_0$, formula (1) prelazi u ekvivalentnu formulu

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Tablica derivacija elementarnih funkcija:

$$\begin{aligned}
(c)' &= 0, \quad c \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &= \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \left(= \frac{1}{x} \log_a e \right), \quad x > 0 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0 \\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

1. Primjenom definicije derivacije ispitajte derivabilnost funkcije $f(x) = x^2 + 3x + 5$ u proizvoljnoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Rj. $f'(x_0) = 2x_0 + 3$.

2. Primjenom definicije derivacije ispitajte derivabilnost funkcije $f(x) = x^2 - x + 1$ u proizvoljnoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Rj. $f'(x_0) = 2x_0 - 1$.

3. Primjenom definicije derivacije ispitajte derivabilnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane formulom $f(x) = |x - 1|$ u točki $x_0 = 1$. Rj. Funkcija nije derivabilna u $x_0 = 1$.

Zadaci uz pravilo $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$:

4. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^5 - 7x^2 - 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 6x + \dfrac{\pi}{8}$,

Rj. $f'(x) = 5x^4 - 14x - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{3}{2x\sqrt{x}} + 6$.

(b) $f(x) = 5\cos x - \sin x + 2\sin\dfrac{\pi}{2}$, Rj. $f'(x) = -5\sin x - \cos x$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^6 - \sqrt[5]{x} - \dfrac{2\pi}{4}$, Rj. $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^5 - \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Zadaci uz pravilo $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$:

5. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$, Rj. $f'(x) = x^2 e^x$.

(b) $f(x) = e^x \cdot \cos x + x^2 \ln x$, Rj. $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) + x(2\ln x + 1)$.

(c) $f(x) = 2^x \arcsin x + x^5 \mathrm{tg}\, x$,

Rj. $f'(x) = 2^x \ln 2 \arcsin x + \dfrac{2^x}{\sqrt{1 - x^2}} + 5x^4 \mathrm{tg}\, x + \dfrac{x^5}{\cos^2 x}$.

Zadaci uz pravilo $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$:

6. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x - 1}$, Rj. $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x - 1}{(x - 1)^2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$, Rj. $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2}$.

(c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$, Rj. $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$.

Zadaci uz pravilo $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$:

7. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = e^{-3x^2}$, Rj. $f'(x) = -6xe^{-3x^2}$.

(b) $f(x) = \cos(x - \sqrt{2x})$, Rj. $f'(x) = -\sin(x - \sqrt{2x}) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)$.

(c) $f\,(x)=(x^2-2x)\ln(3x^2-2x)$,

Rj. $f'(x)=(2x-2)\ln(3x^2-2x)+(x^2-2x)\dfrac{6x-2}{3x^2-2x}$.

(d) $f\,(x)=\sqrt{x+3\sqrt{x}}$, Rj. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right)$.

(e) $f\,(x)=(1+\sin^2 x)^4$, Rj. $f'(x)=4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x$.

Logaritamsko deriviranje

Definicija: Pretpostavimo da je zadana funkcija oblika $y(x)=f(x)^{g(x)}$. Derivaciju računamo na sljedeći način:

Logaritmiramo funkciju $y(x)=f(x)^{g(x)}$ i dobivamo

$$\ln y(x)=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\cdot\ln f(x).$$

Sada, deriviranjem dobivene jednakosti imamo

$$\frac{1}{y(x)}\cdot y'(x)=g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x).$$

Množenjem cijele jednakosti s $y(x)$ dobivamo

$$y'(x)=y(x)\cdot\left(g'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}\cdot f'(x)\right),$$

odnosno

$$y'(x)=f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}\cdot f'(x)\right).$$

1. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $y\,(x)=(x+1)^{2x}$ Rj. $y'=(x+1)^{2x}\left[\dfrac{2x}{x+1}+2\ln(x+1)\right]$.

(c) $y\,(x)=(x-1)^{2x+1}$ Rj. $y'=(x-1)^{2x+1}\left[\dfrac{2x+1}{x-1}+s\ln(x-1)\right]$.

Derivacije višeg reda

Derivacije višeg reda funkcije f definiraju se induktivno s

$$f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)',\quad n\in\mathbb{N},$$

gdje je $f^{(n)}$ oznaka za n - tu derivaciju funkcije f. Prema dogovoru je $f^{(0)}=f$.

2. Za funkciju $f(x)=\cos 2x,\ x\in\mathbb{R}$ izračunajte $f'(x), f''(x), f'''(x)$ i $f^{(4)}(x)$.

   Rj. $f'(x)=-2\sin 2x, f''(x)=-4\cos 2x, f'''(x)=8\sin 2x, f^{(4)}(x)=16\cos 2x$.

3. Za funkciju $f(x)=e^{-5x},\ x\in\mathbb{R}$ izračunajte $f'(x), f''(x), f'''(x)$ i $f^{(4)}(x)$.

   Rj. $f'(x)=-5e^{-5x}, f''(x)=25e^{-5x}, f'''(x)=-125e^{-5x}, f^{(4)}(x)=625e^{-5x}$.