Vježbe 9

Primjena derivacija

Definicija: Neka je funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in (a,b)$. Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Derivacija funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ predstavlja koeficijent smjera tangente na graf funkcije u toj točki i jednaka je tangensu kuta koji ta tangenta zatvara s pozitivnim smjerom osi apscisa.
Jednadžba normale na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

1. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 1}$ u točki s apscisom $x_0 = 1$.

   Rj. $y = -3x + 4, \quad y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}.$

2. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x) = e^{3x}$ u točki s apscisom $x_0 = \ln 3$.

   Rj. $y = 81(x - \ln 3) + 27, \quad y = -\dfrac{1}{81}(x - \ln 3) + 27.$

L'Hospitalovo pravilo

Neodređeni oblici kod limesa su:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$$

Prva dva neodređena oblika mogu se riješiti koristeći L'Hospitalovo pravilo, a ostali oblici se pomoću odgovarajućih transformacija svode na jedan od ovih oblika.

Neka su f i g bilo koje dvije funkcije takve da je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Ako su ispunjene sljedeće pretpostavke:

i) postoji realan broj $\delta > 0$ takav da su funkcije f i g derivabilne u svakoj točki intervala $\langle a - \delta, a + \delta \rangle$, osim možda u točki a,

ii) $g'(x) \neq 0$ za $\forall x \in \langle a - \delta, a + \delta \rangle \setminus \{a\}$,

iii) postoji $L = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

onda je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uz male modifikacije uvjeta analogno pravilo vrijedi i za limese oblika $\frac{\infty}{\infty}$.

1. Primjenom L'Hospitaovog pravila izračunajte:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ Rj. 1

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ Rj. $\frac{1}{2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{x+e^x}$ Rj. 0

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right)$ Rj. 1

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-1}\text{tgx}$ Rj. 1

Intervali monotonosti, lokani ekstremi, konveksnost, konkavnost i točke infleksije

Definicija: Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna na skupu I.

- Funkcija f je monotono rastuća na I onda i samo onda ako je $f'(x) \geq 0$, za svaki $x \in I$. Ako je $f'(x) > 0$, za svaki $x \in I$, onda funkcija f strogo monotono raste na I.
- Funkcija f je monotono padajuća na I onda i samo onda ako je $f'(x) \leq 0$, za svaki $x \in I$. Ako je $f'(x) < 0$, za svaki $x \in I$, onda funkcija f strogo monotono pada na I.

Neka je $f' : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na skupu I te $x_0 \in I$.

- Ako je $f'(x_0) = 0$, kažemo da je x_0 **stacionarna točka** funkcije f.
- Ako je $f''(x_0) < 0$, onda je točka x_0 točka strogog lokalnog maksimuma funkcije f.
- Ako je $f''(x_0) > 0$, onda je točka x_0 točka strogog lokalnog minimuma funkcije f.
- Funkcija f je konveksna na I onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$, za svaki $x \in I$.
- Funkcija f je konkavna na I onda i samo onda ako je $f''(x) \leq 0$, za svaki $x \in I$.
- Točku $x_1 \in I$ nazivamo **točkom infleksije** funkcije f ako postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je f konveksna na $\langle x_1 - \delta, x_1\rangle$ i konkavna na $\langle x_1, x_1 + \delta\rangle$ ili da je f konkavna na $\langle x_1 - \delta, x_1\rangle$ i konveksna na $\langle x_1, x_1 + \delta\rangle$.
- Neka je f dva puta derivabilna na intervalu I. Točka $x_1 \in I$ je točka infleksije funkcije f onda i samo onda ako funkcija f' ima strogi lokalni ekstrem u x_1.

1. Odredite intervale monotonosti funkcija
   (a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

   Rj. Funkcija f strogo monotono raste na intervalu $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$, a strogo monotono pada na intervalu $\langle -2, 1\rangle$.

   (b) $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$

Rj. Funkcija f strogo monotono raste na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$, a strogo monotono pada na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

(c) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

Rj. Funkcija f strogo monotono raste na intervalu $\langle 0, 2\rangle$, a strogo monotono pada na intervalu $\langle 2, 4\rangle$.

(d) $f(x) = x - e^x$.

Rj. Funkcija f strogo monotono raste na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, a strogo monotono pada na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$.

2. Odredite lokalne ekstreme funkcija

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

Rj. Strogi lokalni maksimum je u točki $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$, a strogi lokalni minimun u točki $m = (2, 0)$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 4}$

Rj. Strogi lokalni maksimum je u točki $M = (0, 0)$, a strogi lokalni minimun u točki $m = (8, 16)$.

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Rj. Strogi lokalni maksimum je u točki $M = (0, -2)$, a strogi lokalni minimun u točki $m = (2, 2)$.

(d) $f(x) = (1 - x)e^{-x}$

Rj. Strogi lokalni minimun je u točki $m = \left(2, \frac{1}{e^2}\right)$.

3. Odredite intervale konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije funkcija

(a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

Rj. Funkcija f je konkavna na $\langle -\infty, \frac{5}{3}\rangle$, konveksna na $\langle \frac{5}{3}, \infty\rangle$, a točka infleksije je $I = \left(\frac{5}{3}, -\frac{250}{27}\right)$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

Rj. Funkcija f je konkavna na $\langle -\infty, -3\rangle$, konveksna na $\langle -3, \infty\rangle$ i nema točke infleksije.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Rj. Funkcija f je konkavna na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$, konveksna na $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$, a točka infleksije je $I = (0, 0)$.

(d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Rj. Funkcija f je konkavna na $\langle 0, \sqrt{e^3}\rangle$, konveksna na $\langle \sqrt{e^3}, \infty\rangle$, a točka infleksije je $I = \left(\sqrt{e^3}, \dfrac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

Tijek funkcije

Kako bi odredili tijek funkcije potrebno je odrediti sljedeće:

1. domenu
2. parnost/neparnost i periodičnost
3. nultočke
4. asimptote
5. intervale monotonosti i ekstreme
6. intervale konveksnosti/konkavnosti i točke infleksije
7. skicirati graf funkcije

1. Ispitajte tijek sljedećih funkcija:
   (a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

   (b) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x - 20.$