Riješeni zadaci: Nizovi realnih brojeva

Nizovi, aritmetički niz, geometrijski niz

Funkciju $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazivamo (beskonačni) niz realnih brojeva i označavamo s $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ili (a_n), pri čemu je $a_n = a(n)$.

Aritmetički niz

–opći član

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_{n-1} + d$$

– zbroj prvih n članova

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Geometrijski niz

–opći član

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_{n-1}q$$

– zbroj prvih n članova

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n \cdot a_1, & q = 1 \end{cases}$$

Zadatak 1. Zadani su opći članovi nizova.

(a) $a_n = 2 + (-1)^n$,

(b) $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$,

(c) $c_n = \dfrac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$.

Napišite prvih pet članova.

Rješenje.

(a) Redom imamo:

$a_1 = 2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$
$a_2 = 2 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$
$a_3 = 2 + (-1)^3 = 2 - 1 = 1$
$a_4 = 2 + (-1)^4 = 2 + 1 = 3$
$a_5 = 2 + (-1)^5 = 2 - 1 = 1$

(b)

$$b_1 = \sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2$$
$$b_2 = \sum_{k=1}^{2} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$$
$$b_3 = \sum_{k=1}^{3} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20$$
$$b_4 = \sum_{k=1}^{4} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 40$$
$$b_5 = \sum_{k=1}^{5} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 70$$

(c)

$$c_1 = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1^2} = 1$$
$$c_2 = \frac{\sin \frac{2\pi}{2}}{2^2} = 0$$
$$c_3 = \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3^2} = -\frac{1}{9}$$
$$c_4 = \frac{\sin \frac{4\pi}{2}}{4^2} = 0$$
$$c_5 = \frac{\sin \frac{5\pi}{2}}{5^2} = \frac{1}{25}$$

ZADATAK 2. Odredite opći član niza:

(a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

(b) $0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \dots$

(c) $2, -6, 12, -20, 30, \dots$

Rješenje.

(a) Izraz koji se nalazi u brojniku jednak je indeksu člana niza, a u nazivniku se nalazi broj koji je za jedan veći od broja u nazivniku te je opći član dan s: $a_n = \frac{n}{n+1}$.

(b) Primjetimo da je svaki član niza s neparnim indeksom jednak 0, odnosno $a_{2n+1} = 0$. Svi članovi niza s parnim indeksima u brojniku imaju 1, a nazivnici se povećavaju za 1, počevši od 3. To možemo zapisati kao: $a_{2n} = \frac{1}{n+2}$, dakle:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ \frac{1}{\frac{n}{2}+2}, & n = 2k \end{cases}$$

ili kao

$$a_n = \frac{\frac{1+(-1)^n}{2}}{\frac{n}{2}+2}$$

(c) Primjetimo da je svaki član s neparnim indeksom pozitivan, a svaki član s parnim indeksom negativan. Promotrimo sada niz koji sadrži apsolutne vrijednosti članova zadanog niza, odnosno niz (b_n), gdje je $b_n = |a_n|$. Njegovih prvih pet članova je $2, 6, 12, 20, 30$. Primjetimo da je $b_2 = b_1 + 4 = b_1 + 2 \cdot 2$, $b_3 = b_2 + 6 = b_2 + 2 \cdot 3$, $b_4 = b_3 + 8 = b_4 + 2 \cdot 4$, $b_5 = b_4 + 10 = b_4 + 2 \cdot 5$, odnosno

$$b_n = b_{n-1} + 2 \cdot n = b_{n-2} + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n = b_{n-3} + 2 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n$$

$$= \cdots = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot (n-1) + 2 \cdot n = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$

(Posljednju jednakost lako dokažemo matematičkom indukcijom). Sada lako zaključimo da je opći član zadanog niza dan s $a_n = (-1)^{n+1} n(n+1)$.

Zadatak 3. Odredite aritmetički niz ako je:

(a) $a_3 + a_7 = 2, \quad a_6 - a_4 = 3,$

(b) $a_3 + a_5 + a_7 = 7, \quad a_2 + a_6 = 5.$

Rješenje.

(a) Kako je traženi niz aritmetički, svaki njegov član možemo zapisati pomoću prvog člana niza a_1 i diferencije d. Nakon uvrštavanja imamo:

$$\begin{aligned} a_1 + 2d + a_1 + 6d &= 2 \\ a_1 + 5d - (a_1 + 3d) &= 3 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 2a_1 + 8d &= 2 \\ 2d &= 3. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $a_1 = -5$ i $d = \dfrac{3}{2}$, tj. opći član niza zadan je s:

$$a_n = -5 + \frac{3}{2}(n-1).$$

(b) Kao i u prethodnom zadatku, svaki član niza zapišemo pomoću a_1 i d, i nakon toga riješimo dobiveni sustav:

$$\begin{aligned} 3a_1 + 12d &= 7 \\ 2a_1 + 6d &= 5. \end{aligned}$$

Opći član niza zadan je s:

$$a_n = 3 - \frac{1}{6}(n-1).$$

ZADATAK 4. Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza je 165. Ako je $a_1 = -10$ i $a_4 = -1$, koliki je n?

Rješenje. Kako je $a_4 = a_1 + 3d$, diferencija zadanog niza je $d = 3$. Suma prvih n članova aritmetičkog niza dana je s

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Kako bi odredili n trebamo riješiti sljedeću jednadžbu (dobivenu uvrštavanjem poznatih članova u gornji izraz):

$$3n^2 - 23n - 330 = 0.$$

Rješenja jednadžbe su $n_1 = -\dfrac{22}{3}$ i $n_2 = 15$. Budući je domena niza skup prirodnih brojeva, traženo rješenje je $n = 15$.

ZADATAK 5. Odredite aritmetički niz (a_n) za koji je $s_n = 2n + 3n^2$.

Rješenje. Kako bi odredili aritmetički niz, potrebno je pronći njegov prvi član i diferenciju. Po definiciji je $s_1 = a_1$, te uvrštavanjem $n = 1$ u izraz za sumu imamo:

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 5.$$

$s_2 = a_1 + a_2 = 2a_1 + d$, te imamo

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 5 + d \Rightarrow d = 6.$$

Opći član niza je $a_n = 5 + 6(n-1)$.

ZADATAK 6. Odredite geometrijski niz ako je:

(a) $a_1 - a_2 = 35, \quad a_3 - a_4 = 560,$

(b) $a_3 + a_5 + a_7 = 7, \quad a_2 + a_6 = 5.$

Rješenje.

(a) Kako je traženi niz geometrijski, svaki njegov član možemo zapisati pomoću prvog člana niza a_1 i kvocijenta q. Nakon uvrštavanja imamo:

$$\begin{aligned} a_1 - a_1q &= 35 \\ a_1q^2 - a_1q^3 &= 560. \end{aligned}$$

Zadani sustav ima dva rješenja, odnosno nizovi:

$$a_n = -\frac{35}{3} \cdot 4^{n-1} \qquad \& \qquad b_n = 7 \cdot (-4)^{n-1}$$

zadovoljavaju zadane uvjete.

(b) Kao i u prethodnom zadatku, svaki član niza zapišemo pomoću a_1 i q, i nakon toga riješimo dobiveni sustav:

$$\begin{aligned} a_1q(1-q^2) &= 1 \\ a_1q^2(q^2-1) &= 3. \end{aligned}$$

Opći član niza zadan je s:

$$a_n = \frac{(-3)^{n-1}}{24}.$$

ZADATAK 7. Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je 341. Ako je $a_1 = \frac{1}{3}$ i $a_4 = \frac{8}{3}$, koliki je n?

Rješenje. Kako je $a_4 = a_1 q^3$, kvocijent zadanog niza je $q = 2$. Suma prvih n članova geometrijskog niza (u slučaju kada je $q \neq 1$) dana je s

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Kako bi odredili n trebamo riješiti sljedeću eksponencijalnu jednadžbu (dobivenu uvrštavanjem poznatih članova u gornji izraz):

$$2^n = 1024.$$

Rješenje jednadžbe je $n = 10$.

ZADATAK 8. Zbroj prvih n članova geometrijskog niza izračunava se po formuli $s_n = 3(2^n - 1)$. Odredite niz.

Rješenje. Kako bi odredili geometrijski niz, potrebno je pronći njegov prvi član i kvocijent. Po definiciji je $s_1 = a_1$, te uvrštavanjem $n = 1$ u izraz za sumu imamo:

$$a_1 = 3 \cdot (2^1 - 1) = 3.$$

$s_2 = a_1 \frac{1 - q^2}{1 - q} = a_1(1 + q)$, te imamo

$$3 \cdot (2^2 - 1) = 3 \cdot (1 + q) \Rightarrow q = 2.$$

Opći član niza je $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Značajni limesi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n} = e^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{f(n)}\right)^{\beta f(n)} = e^{\alpha\beta},$$ za svaki niz funkcijskih vrijednosti $f(n)$ koji divergira prema $\pm\infty$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{cases}$$

ZADATAK 1. Odredite sva gomilišta sljedećih nizova:

(a) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$,

(b) $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-1} + \sin \dfrac{n\pi}{2}$.

Rješenje.
(a) Primjetimo da su svi članovi danog niza s neparnim indeksima jednaki 0, a svi članovi s parnim indeksima 1. Iz toga zaključujemo da zadani niz ima dva gomilišta, 0 i 1.

(b) Kako $\sin \frac{n\pi}{2}$ prima samo tri različite vrijednosti za $n \in \mathbb{N}$ (-1, 0 i 1), niz možemo zadati i na sljedeći način:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{3n-1}, & n = 2k \\ \dfrac{2n+1}{3n-1} + 1, & n = 4k-3 \\ \dfrac{2n+1}{3n-1} - 1, & n = 4k-1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

Iz gornjeg zapisa zaključujemo da zadani niz ima tri gomilišta, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{3}$.

ZADATAK 2. Izračunajte limes sljedećih nizova:

(a) $a_n = \dfrac{3n^9 + 2n^6 - 7n}{2n^9 - n^7 + 4n^3}$,

(b) $a_n = \dfrac{6n+1}{\sqrt{4n^2 - 2n + 1}}$,

(c) $a_n = 10n(\sqrt{n^2+1} - n)$,

(d) $a_n = \dfrac{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}{n+3} - n$,

(e) $a_n = \dfrac{(n+3)! - (n+1)!}{(n+2)!}$.

Rješenje.
(a) Izlučimo li n^9 iz brojnika i nazivnika općeg člana dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^9 + 2n^6 - 7n}{2n^9 - n^7 + 4n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n^3} - \frac{7}{n^8}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^6}} = \frac{3}{2}.$$

(b) Izlučimo li n iz brojnika i nazivnika općeg člana dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{\sqrt{4n^2 - 2n + 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3.$$

(c) Racionalizacijom izraza u zagradama dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 10n(\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n\to\infty} 10n(\sqrt{n^2+1} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{10}{2} = 5.$$

(d) Izraz u brojniku jednak je n^2, pa se dani limes svodi na

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3} - n \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3}{1+\frac{3}{n}} = -3.$$

(e) Izlučimo li $(n+1)!$ iz brojnika i nazivnika općeg člana dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)! - (n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)(n+2) - 1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+5}{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+3+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \infty.$$

Zadatak 3. Izračunajte limes sljedećih nizova:

(a) $a_n = \dfrac{5^n+2}{3-5^{n+1}}$,

(b) $a_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$,

(c) $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^{n-1}}}$.

Rješenje.
(a) Izlučimo li 5^n iz brojnika i nazivnika općeg člana dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n+2}{3-5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{5^n}}{\frac{3}{5^n}-5} = -\frac{1}{5}.$$

(b) Izlučimo li iz brojnika i nazivnika izraz s većom bazom slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 3.$$

(c) Izraz u brojniku jednak je sumi prvih n članova geometrijskog niza $b_n = \frac{1}{3^{n-1}}$, a izraz u nazivniku je jednak sumi prvih n članova geometrijskog niza $c_n = \frac{1}{5^{n-1}}$. Računamo sljedeći limes:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}}{\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{5}.$$

ZADATAK 4. Izračunajte limes sljedećih nizova:

(a) $a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n$,

(b) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2}$,

(c) $a_n = 2n(\ln n - \ln(n-2))$.

Rješenje.
(a) Koristeći poznati limes

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\beta n} = e^{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

imamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^n = e^{-\frac{2}{3}}.$$

(b) Podijelimo li izraz u brojniku i nazivniku s n^2 dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{e^{-1}}{e^2} = e^{-3}.$$

(c) Koristeći svojstva logaritamske funkcije zadani limes možemo zapisati u obliku:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2n(\ln n - \ln(n-2)) = \lim_{n\to\infty} 2n \ln\left(\frac{n}{n-2}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n-2}\right)^{2n}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije $\ln x$ i svojstva da je $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ za sve neprekidne funkcije, vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n-2}\right)^{2n} = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{2n}\right] = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n}}\right] = \ln e^4 = 4.$$