Riješeni zadaci: Limes funkcije. Neprekidnost

Limes funkcije

Neka je $x_0 \in [a,b]$ i $f : D \to \mathbb{R}$, gdje je $D = [a,b]$ ili $D = [a,b] \setminus \{x_0\}$. Kažemo da je **limes** funkcije f u točki x_0 jednak L i pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

ako za svaki niz (x_n) iz $D\,(x_n \neq x_0)$ koji konvergira prema x_0, niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_n))$ konvergira prema L.

Pomoću navedenih definicija i pravila za limese nizova realnih brojeva može se pokazati da vrijede sljedeća pravila za računanje s limesima funkcija u točki:

$$1)\ \lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$2)\ \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$3)\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Nadalje, vrijede sljedeći važni limesi:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{\beta}{x}} = e^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 1. Ispitajte postoji li limes funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadane formulom $f(x) = 3x$ u točki $x_0 = 1$.

Rješenje.

Neka je (x_n) bilo koji niz takav da $x_n \to 1$. Tada je $f(x_n) = 3x_n \to 3$, pa je $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Niz (x_n) koji konvergira prema 1 možemo izabrati na tri različita načina:

(i) tako da njegovi članovi slijeva teže prema 1, kao što je primjerice niz

$$x_n : \quad \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \cdots \frac{n^2}{n^2+1}, \cdots \to 1 \tag{1}$$

(ii) tako da njegovi članovi zdesna teže prema 1, kao što je primjerice niz

$$x_n : \quad 2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \cdots \frac{n^2+1}{n^2}, \cdots \to 1 \tag{2}$$

(iii) tako da njegovi članovi teže prema 1 malo slijeva - malo zdesna, kao što je primjerice niz

$$x_n : \quad 0, \frac{5}{4}, \frac{8}{9}, \frac{17}{16}, \cdots 1 + (-1)^n \frac{1}{n^2}, \cdots \to 1 \tag{3}$$

Nizovi funkcijskih vrijednosti u sva tri slučaja teže prema 3:

(i) $\frac{3}{2}, \frac{12}{5}, \frac{27}{10}, \cdots \frac{3n^2}{n^2+1}, \cdots \to 3$

(ii) $6, \frac{15}{4}, \frac{30}{9}, \cdots \frac{3n^2+3}{n^2}, \cdots \to 3$

(iii) $0, \frac{15}{4}, \frac{24}{9}, \frac{51}{16}, \cdots 3 + (-1)^n \frac{3}{n^2}, \cdots \to 3.$

Zadatak 2. Ispitajte postoji li limes funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadane formulom $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$ u točki $x_0 = 1$.

Rješenje. Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da $x_n \to 1$.

(i) Ako članovi niza (x_n) slijeva teže prema 1, primjerice kao niz (1), za odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti vrijedi $f(x_n) \to 2$.

(ii) Ako članovi niza (x_n) zdesna teže prema 1, primjerice kao niz (2), za odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti vrijedi $f(x_n) \to 4$.

(iii) Ako članovi niza (x_n) teže prema 1 malo slijeva - malo zdesna, primjerice kao niz (3), odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti ima dva gomilišta (to su 2 i 4) te stoga niz divergira.

Zaključujemo da $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ne postoji.

Zadatak 3. Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

(b) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x^2 - 1}$

Rješenje.

(a) Nakon uvrštavanja $x = 2$ funkcija u brojniku i funkcija u nazivniku poprimaju vrijednost nula, pa je zadani limes neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$. Kako su obje funkcije polinomi njihovim rastavljanjem na faktore dobivamo i u brojniku i u nazivniku $(x-2)$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}.$$

(b) Zadani limes je neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$, stoga ćemo funkciju pod znakom limesa malo preurediti

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}.$$

(c) Iz istog razloga, kao u prethodnim primjerima, preuredimo funkciju pod znakom limesa

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1} &= \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Zadatak 4. Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+5}\right)$

Rješenje.

(a) Kako je dani limes neodređenog oblika $(\infty-\infty)$ transformacijom izraza u zagradi dobivamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)\frac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2+3}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(x^2+3\right)}{x+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{x+\sqrt{x^2+3}}=0.\end{aligned}$$

(b) Zadani limes je neodređenog oblika $(\infty-\infty)$, stoga ćemo funkciju pod znakom limesa malo preurediti

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+5}\right)\\ &=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+5}\right)\frac{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+5}}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-2x+3\right)-\left(x^2+5\right)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+5}}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+5}}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}\\ &=\frac{-2}{2}=-1.\end{aligned}$$

Zadatak 5. Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{4x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\arcsin x}{7x}$

Rješenje.

Najprije treba transformirati funkcije pod znakom limesa tako da možemo primjeniti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(a) Primjenom formule $\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

(b) Primjenom formule $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\cos x\right)$ dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{8}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{8}.$$

(c) Supstitucijom $\arcsin x=t$ dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\arcsin x}{7x}=\left[\begin{array}{c}\arcsin x=t\\ x\to 0\\ t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{5t}{7\sin t}=\frac{5}{7}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{5}{7}.$$

ZADATAK 6. Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{-2x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

Rješenje.

Najprije treba transformirati funkcije pod znakom limesa tako da možemo primijeniti

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

(a) Podjelimo izraz u brojniku i nazivniku s x, pa dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-2x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-2x}}=\frac{e^{-6}}{e^2}=e^{-8}.$$

(b) Supstitucijom $e^x-1=t$ i primjenom svojstava logaritamske funkcije dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\begin{array}{c}e^x-1=t\\ x\to 0, t\to 0\\ x=\ln\left(t+1\right)\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln\left(t+1\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\,\ln\left(t+1\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(t+1\right)^{\frac{1}{t}}}$$

Kako za logaritamsku funkciju vrijedi $\lim\limits_{x\to a}\left[\ln f\left(x\right)\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)\right]$, slijedi

$$\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(t+1\right)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{t\to 0}\left(t+1\right)^{\frac{1}{t}}}$$

Supstitucijom $u = 1/t$ transformiramo funkciju pod znakom limesa

$$\frac{1}{\ln \lim\limits_{t\to 0} (t+1)^{\frac{1}{t}}} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{t} \\ t \to 0 \\ u \to \infty \end{bmatrix} = \frac{1}{\ln \lim\limits_{u\to\infty} \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Zadatak 7. Za funkciju $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ zadanu formulom $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ izračunajte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Rješenje. Kako za eksponencijalnu funkciju vrijedi $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, možemo lako izačunati tražene limese.

(a) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty.$

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x}} = e^{0} = 1.$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}} = e^{0} = 1.$

Asimptote funkcije

Pravac $y = kx + l$ nazivamo **desna kosa asimptota** funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ako vrijedi

$$\lim_{x\to +\infty} (f(x) - (kx + l)) = 0.$$

Koeficijenti k i l desne kose asimptote iznose:

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad l = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - kx).$$

Pravac $y = kx + l$ nazivamo **lijeva kosa asimptota** funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ako vrijedi

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - (kx + l)) = 0.$$

Koeficijenti k i l lijeve kose asimptote iznose:

$$k = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad l = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - kx).$$

Specijalno, za $k = 0$ pravac $y = l$ nazivamo **horizontalna asimptota**.
Pravac $x = a$ je **vertikalna asimptota** funkcije f ako vrijedi

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty.$$

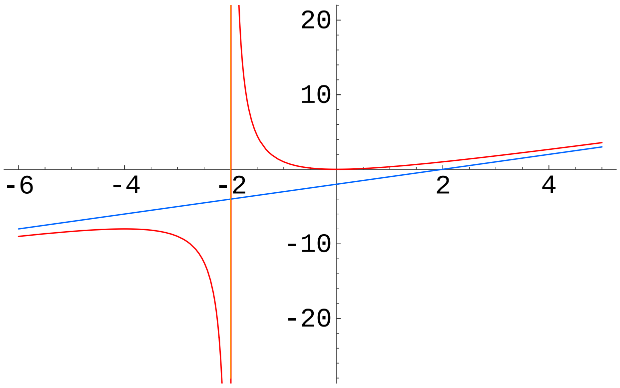
Zadatak 1. Odredite asimptote funkcije
$$f(x)=\frac{x^2}{x+2}.$$

Rješenje. Kako je područje definicije funkcije f skup $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, vertikalna asimptota se može nalaziti samo u točki $x=-2$, pa računamo limes slijeva i zdesna u toj točki.

$$\lim_{x\to-2-}\frac{x^2}{x+2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+}\frac{x^2}{x+2}=+\infty.$$

Dakle, pravac $x=-2$ je vertikalna asimptota.



Slika 1: Graf funkcije, kosa i vertikalna asimptota

Sada računamo koeficijente k i l kose asimptote, gdje je k koeficijent smjera, a l njen odsječak na y-osi:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x+2)}=1,\\ l &= \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x+2}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{x+2}=-2. \end{aligned}$$

Stoga je pravac $y=x-2$ obostrana kosa asimptota, pa funkcija f nema horizontalnih asimptota.

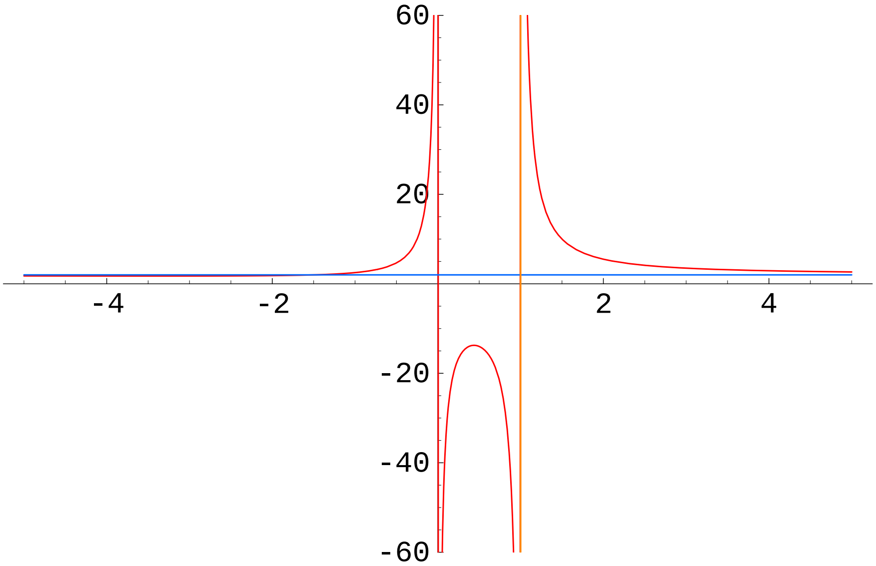
Na Slici 1. crvenom bojom prikazan je graf funkcije f, narančastom bojom vertikalna asimptota dok je plavom bojom prikazana kosa asimptota.

Zadatak 2. Odredite asimptote funkcije
$$f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2-x}.$$

Rješenje. Domena funkcije f je skup $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, pa se vertikalne asimptote mogu nalaziti samo u točkama $x_1=0$ i $x_2=1$. Limesi slijeva i zdesna u tim točkama iznose

$$\lim_{x\to0-}\frac{2x^2+3}{x^2-x}=+\infty,\quad \lim_{x\to0+}\frac{2x^2+3}{x^2-x}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{2x^2+3}{x^2-x}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+}\frac{2x^2+3}{x^2-x}=+\infty.$$



Slika 2: Graf funkcije, horizontalna i vertikalne asimptote

Stoga su pravaci $x = 0$ i $x = 1$ vertikalne asimptote funkcije.

Kako koeficijenti k i l kose asimptote iznose

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x(x^2-x)} = 0, \\ l &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-x} = 2, \end{aligned}$$

funkcija f nema kosu asimptotu, a pravac $y = 2$ je horizontalna asimptota.

Na Slici 2. crvenom bojom prikazan je graf funkcije f, narančastom bojom vertikalne asimptota dok je plavom bojom prikazana horizontalna asimptota.

ZADATAK 3. Odredite asimptote funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x.$$

Rješenje. Domena funkcije f je skup $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, pa se vertikalna asimptota može nalaziti samo u točki $x = 0$.

Kako je

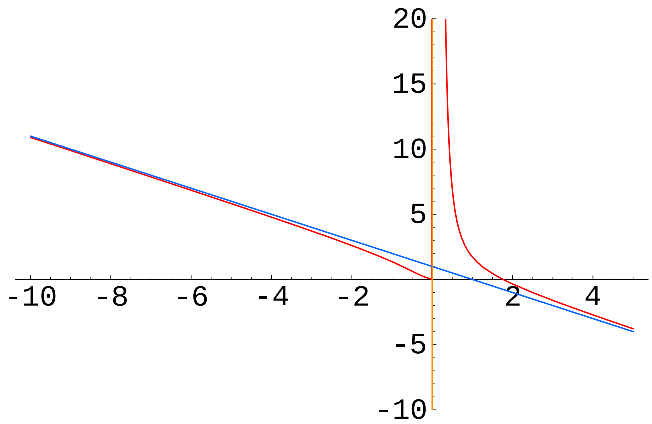
$$\lim_{x\to 0-} \left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} \left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \infty,$$

pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije.

Koeficijenti k i l kose asimptote iznose

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 1\right) = -1, \\ l &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - x + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1. \end{aligned}$$



Slika 3: Graf funkcije, kosa i vertikalna asimptota

Stoga je pravac $y = -x+1$ obostrana kosa asimptota, pa funkcija f nema horizontalnih asimptota.

Na Slici 3. crvenom bojom prikazan je graf funkcije f, narančastom bojom vertikalna asimptota dok je plavom bojom prikazana kosa asimptota.

Neprekidnost funkcije

Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je **neprekidna u točki** $x_0 \in (a, b)$ ako ima limes u točki x_0 koji je jednak $f(x_0)$, odnosno ako je

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je neprekidna na intervalu (a, b) ako je neprekidna u svakoj točki intervala.

Zadatak 1. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Odredite točke prekida.

Rješenje. Računamo limes slijeva i zdesna u točki $x_0 = 2$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x+2) = 4,$$

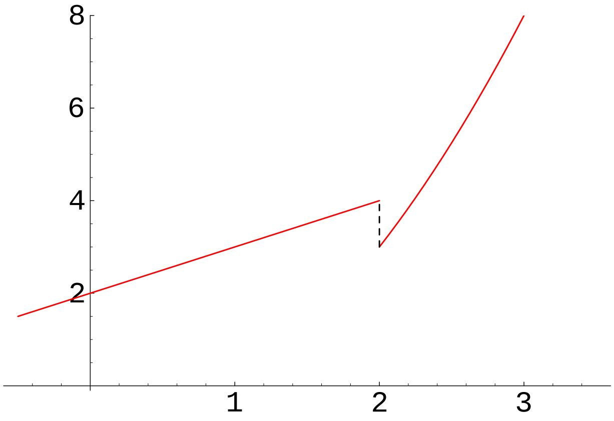
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \left(x^2 - 1\right) = 3.$$

Kako je

$$\lim_{x \to 2-} f(x) \neq \lim_{x \to 2+} f(x)$$

točka $x_0 = 2$ je točka prekida.

Na Slici 4. prikazan je graf funkcije f.



Slika 4: Graf funkcije f

Zadatak 2. Neka je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & x\neq 1\\ 4, & x=1.\end{cases}$$

Da li je f neprekidna u točki $x_0=1$?

Rješenje. Funkcija f nije neprekidna u točki $x_0=1$, vrijedi

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=3,$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=3,$$

ali

$$f(1)=4.$$

Na Slici 5. prikazan je graf funkcije f.

Zadatak 3. Odredite parametar a tako da funkcija

$$f(x)=\begin{cases}9-x^2, & x\leq 3\\ x+a, & x>3.\end{cases}$$

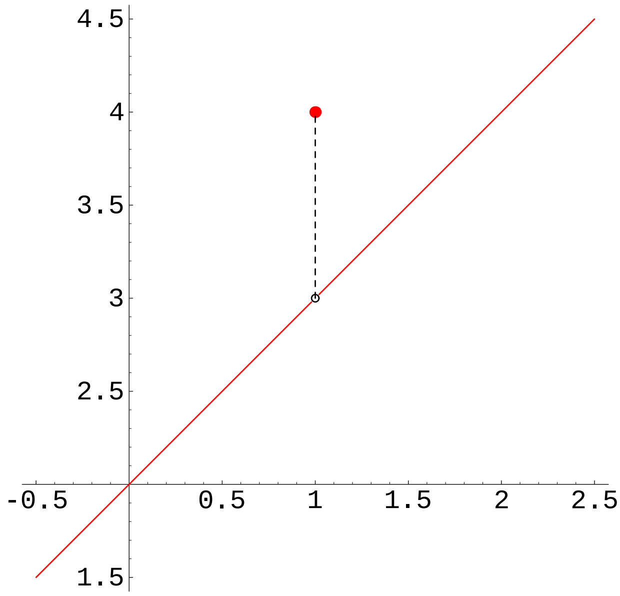
bude neprekidna.

Rješenje. Kako je funkcija f zadana po dijelovima pomoću neprekidih funkcija, možemo zaključiti da je f neprekidna na skupu $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. Treba odrediti konstantu a tako da f bude neprekidna u točki $x_0=3$, odnosno da vrijedi

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)\,. \tag{4}$$

Za danu funkciju f vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3-} f(x) &= \lim_{x\to 3-}(9-x^2)=0,\\ \lim_{x\to 3+} f(x) &= \lim_{x\to 3+}(x+a)=3+a,\\ f(3) &= 0.\end{aligned}$$



Slika 5: Graf funkcije f

Uvrstimo li dobivene rezultate u (4) slijedi

$$a + 3 = 0,$$

odnosno $a = -3$.

Zadatak 4. Odredite parametar a tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + a, & x \geq 0. \end{cases}$$

bude neprekidna.

Rješenje. Sličnim razmatranjem kao u prethodnom zadatku, odredimo konstantu a tako da funkcija f bude neprekidna u točki $x_0 = 0$. Kako je

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0-} f(x) &= \lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1, \\ \lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0+} (x^2 + a) = a, \\ f(0) &= a, \end{aligned}$$

iz (4) slijedi $a = 1$.