Riješeni zadaci: Diferencijalni račun

Derivacije

Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ako limes (1) ne postoji, onda kažemo da funkcija f nije derivabilna u točki x_0. Ako je funkcija f derivabilna u točki x_0, onda realan broj (1) zovemo **derivacija funkcije f u točki** x_0 i označavamo s $f'(x_0)$, tj.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, onda kažemo da je ona derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Funkciju $x \mapsto f'(x)$ definiranu na $\langle a, b\rangle$ označavamo s f' i nazivamo **derivacijom funkcije f na** $\langle a, b\rangle$.

Supstitucijom $\Delta x = x - x_0$, formula (1) prelazi u ekvivalentnu formulu

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Ako su $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije u točki $x \in \langle a, b\rangle$, onda su i $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ derivabilne u točki $x \in \langle a, b\rangle$ i vrijede sljedeća pravila:

1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, uz dodatni uvjet $g(x) \neq 0$

4) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Tablica derivacija elementarnih funkcija:

$$\begin{aligned}
(c)' &= 0, \quad c \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &= \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad \left(= \frac{1}{x} \log_a e\right), \quad x > 0 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0 \\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R} \\
(e^x)' &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\sin x)' &= \cos x, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\cos x)' &= -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

ZADATAK 1. Ispitajte derivabilnost funkcije $f(x) = x^3$ u proizvoljnoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

Zadatak ćemo riješiti koristeći formulu (2). Kako je

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(x^2 + x_0 x + x_0^2\right) = 3x_0^2,
\end{aligned}
$$

funkcija $f(x) = x^3$ je derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ i vrijedi $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Uvjerite se da isto rješenje dobijemo i pomoću formule (1).

ZADATAK 2. Funkcija f je zadana formulom $f(x) = \sqrt{x+1}$. Izračunajte $f'(3)$.

Rješenje.

Koristit ćemo definicionu formulu (1).

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(3 + \triangle x) - f(3)}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sqrt{4 + \triangle x} - \sqrt{4}}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sqrt{4 + \triangle x} - \sqrt{4}}{\triangle x} \cdot \frac{\sqrt{4 + \triangle x} + \sqrt{4}}{\sqrt{4 + \triangle x} + \sqrt{4}} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4 + \triangle x} + 2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Uvjerite se da isto rješenje dobijemo i pomoću formule (1).

ZADATAK 3. Ispitajte derivabilnost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane formulom $f(x) = |x+1|$ u točki $x_0 = -1$.

Rješenje. Vrijedi

$$
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{|x+1|}{x+1} = \begin{cases} 1, & x > -1 \\ -1, & x < -1. \end{cases}
$$

Sada, uočimo da

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

ne postoji [1] te stoga funkcija f nije derivabilna u $x_0 = -1$.

Zadatak 4. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x - 4$

(b) $f(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[3]{5}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{1}{2^5}$

(d) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^3}}}$.

Rješenje.

(a) Primjenom pravila za deriviranje sume funkcija, dobivamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2x - 4\right)' \\ &= \left(x^4\right)' - \left(5x^3\right)' + \left(3x^2\right)' + (2x)' - (4)' \\ &= 4x^3 - 5\left(3x^2\right) + 3(2x) + 2(1) - 0 \\ &= 4x^3 - 15x^2 + 6x + 2. \end{aligned}$$

(b) Napišemo prva tri izraza u obliku opće potencije pa imamo

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}.$$

Primjenom pravila za deriviranje sume i opće potencije, slijedi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(5\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[3]{5}\right)' = 5\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + 4\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' - 3\left(x^{\frac{2}{5}}\right)' + \left(\sqrt[3]{5}\right)' \\ &= 5\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 3\cdot\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} + 0 = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{3x\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{5\sqrt[5]{x^3}}. \end{aligned}$$

(c) Iz istog razloga, kao u prethodnom primjeru, napišemo sumande u obliku opće potencije i dobivamo

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x} + \frac{3}{x^4} - \frac{1}{2^5}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-1}\right)' + 3\left(x^{-4}\right)' - \left(\frac{1}{2^5}\right)'$$

[1] Promatrajmo niz s općim članom $a_n = -1 - \frac{1}{n}$, koji slijeva konvergira ka -1. Pri tome za odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(-1)}{a_n + 1} = -1.$$

S druge strane promatramo li niz s općim članom $a_n = -1 + \frac{1}{n}$, koji zdesna konvergira ka -1, za odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(-1)}{a_n + 1} = 1.$$

Prema definiciji limesa funkcije u točki zaključujemo da

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

ne postoji.

$$= \frac{-1}{2}\left(x^{-2}\right) + 3(-4)\left(x^{-5}\right) + 0 = -\frac{1}{2x^2} - \frac{12}{x^5}.$$

(d) Analogno, napišemo dani izraz u obliku opće potencije

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^3}}} = \sqrt{x}\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[8]{x^3} = x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{8}} = x^{\frac{9}{8}}.$$

Deriviranjem dobivamo

$$f'(x) = \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^3}}}\right)' = \left(x^{\frac{9}{8}}\right)' = \frac{9}{8}x^{\frac{1}{8}}.$$

Zadatak 5. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \log_4 x + 3^x$

(b) $f(x) = 2\sin x - 3\cos x + \sin\pi$

(c) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

Rješenje.

Primjenom pravila za deriviranje sume funkcija, te formula za deriviranje eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijskih funkcija dobivamo tražene derivacije.

(a)

$$f'(x) = (\log_4 x + 3^x)' = (\log_4 x)' + (3^x)' = \frac{1}{x\ln 4} + 3^x\ln 3 = \frac{1}{2x\ln 2} + 3^x\ln 3.$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\sin x - 3\cos x + \sin\pi)' = 2(\sin x)' - 3(\cos x)' + (\sin\pi)' \\ &= 2\cos x - 3(-\sin x) + 0 = 2\cos x + 3\sin x. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = (\operatorname{tg} x)' - (\operatorname{ctg} x)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Zadatak 6. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x$

(b) $f(x) = \left(1 - x^2\right)\log x$

(c) $f(x) = e^x \cdot \sin x + \cos x$.

Rješenje.

Koristimo pravilo za deriviranje produkta dvaju funkcija.

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x \cdot \operatorname{ctg} x)' = (\cos x)' \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot (\operatorname{ctg} x)' \\ &= -\sin x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = -\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ &= -\cos x \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\left(1-x^2\right)\log x\right]' = \left(1-x^2\right)' \log x + \left(1-x^2\right)(\log x)' \\ &= -2x\log x + \left(1-x^2\right)\frac{1}{x\ln 10}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x \cdot \sin x + \cos x)' = (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' + (\cos x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \sin x = (e^x - 1)\sin x + e^x \cos x. \end{aligned}$$

Zadatak 7. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1-3^x}{1+3^x}$.

Rješenje.

Koristimo pravilo za deriviranje kvocijenta dvaju funkcija.

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x+3}{x+4}\right)' = \frac{(2x+3)' \cdot (x+4) - (2x+3)\cdot(x+4)'}{(x+4)^2} \\ &= \frac{2\cdot(x+4) - (2x+3)\cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x-3}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)\cdot(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)\cdot(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)\cdot(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} \\
&= \frac{-2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{1-x^2}\right)' = \frac{(\ln x)'\cdot(1-x^2) - \ln x\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{x}\cdot(1-x^2) - \ln x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{\frac{1-x^2+2x^2\,\ln x}{x}}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{1-x^2+2x^2\,\ln x}{x(1-x^2)^2}.
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1-3^x}{1+3^x}\right)' = \frac{(1-3^x)'\cdot(1+3^x) - (1-3^x)\cdot(1+3^x)'}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{(-3^x\ln 3)(1+3^x) - (1-3^x)(3^x\ln 3)}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{-3^x\ln 3 - 3^{2x}\ln 3 - 3^x\ln 3 + 3^{2x}\ln 3}{(1+3^x)^2} \\
&= \frac{-2\cdot 3^x\ln 3}{(1+3^x)^2}.
\end{aligned}
$$

ZADATAK 8. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = (x^2+5)^3$

(b) $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \log_3(x^2 - \sin x)$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

Rješenje.

Koristimo pravilo za deriviranje kompozicije funkcija.

(a) Označimo $h(x) = x^3$ i $g(x) = x^2+5$. Pravilo za derivaciju kompozicije funkcija glasi

$$f'(x) = [h(g(x))]' = h'(g(x))\cdot g'(x).$$

Kako je $h'(x) = 3x^2$ i $g'(x) = 2x$ imamo

$$f'(x) = h'(x^2+5)\cdot 2x = 3(x^2+5)^2\cdot 2x.$$

Stoga je

$$f'(x) = \left[(x^2+5)^3\right]' = 3(x^2+5)^2\cdot 2x = 6x(x^2+5).$$

(b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\sqrt{x+2\sqrt{x}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} \cdot (x+2\sqrt{x})' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\log_3(x^2 - \sin x)\right]' = \frac{1}{(x^2 - \sin x)\ln 3} \cdot (x^2 - \sin x)' \\
&= \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x)\ln 3}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}\right]' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\
&= \frac{1}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \cdot \left(\frac{1 \cdot (1-x) + (1+x) \cdot 1}{(1-x)^2}\right) \\
&= \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Logaritamsko deriviranje

Pretpostavimo da je zadana funkcija oblika $y(x) = f(x)^{g(x)}$. Derivaciju računamo na sljedeći način:

Logaritmiramo funkciju $y(x) = f(x)^{g(x)}$ i dobivamo

$$\ln y(x) = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x).$$

Sada, deriviranjem dobivene jednakosti imamo

$$\frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Konačno, množenjem cijele jednakosti s $y(x)$ dobivamo

$$y'(x) = y(x) \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right)$$

te konačno

$$y'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x)\right).$$

ZADATAK 9. Izračunajte derivaciju funkcije $y(x) = x^{\sin x}$.

Rješenje.

Logaritmiranjem funkcije $y(x) = x^{\sin x}$ slijedi

$$\begin{aligned}\ln y(x) &= \ln x^{\sin x}\\ \ln y(x) &= \sin x \cdot \ln x.\end{aligned}$$

Deriviranjem dobivene jednakosti imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(x)}y'(x) &= (\sin x)' \ln x + \sin x(\ln x)'\\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Množenjem cijele jednakosti s $y(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned}y'(x) &= y(x)\left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right]\\ y'(x) &= x^{\sin x}\left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right].\end{aligned}$$

ZADATAK 10. Izračunajte derivaciju funkcije $y(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

Rješenje.

Logaritmiranjem funkcije $y(x) = (\sin x)^{\cos x}$ slijedi

$$\begin{aligned}\ln y(x) &= \ln(\sin x)^{\cos x}\\ \ln y(x) &= \cos x \cdot \ln(\sin x).\end{aligned}$$

Deriviranjem dobivene jednakosti imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{y(x)}y'(x) &= (\cos x)' \ln(\sin x) + \cos x(\ln(\sin x))'\\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}.\end{aligned}$$

Množenjem cijele jednakosti s $y(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned}y'(x) &= y(x)\left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right],\\ y'(x) &= (\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right].\end{aligned}$$

DERIVACIJE VIŠEG REDA

Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$, onda funkciju $x \mapsto f'(x)$ definiranu na $\langle a, b\rangle$ označavamo s f' i nazivamo **prvom derivacijom funkcije f na** $\langle a, b\rangle$. Ona može ali i ne mora biti derivabilna funkcija na $\langle a, b\rangle$. Ako je prva derivacija f'

derivabilna na $\langle a, b\rangle$, onda njenu derivaciju nazivamo **drugom derivacijom funkcije** f **na** $\langle a, b\rangle$ i označavamo s f''. Dakle, $f'' = (f')'$. Derivacije višeg reda definiraju se induktivno:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje je $f^{(n)}$ oznaka za n - tu derivaciju funkcije f. Prema dogovoru je $f^{(0)} = f$.

ZADATAK 11. Izračunajte n - tu derivaciju funkcije $f(x) = x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

Prva derivacija iznosi

$$f'(x) = (x \cdot e^x)' = (1 + x)e^x.$$

Druga derivacija, odnosno derivacija prve derivacije funkcije f jednaka je

$$f''(x) = (f'(x))' = [(1 + x)e^x]' = (2 + x)e^x.$$

Treća derivacija, odnosno derivacija druge derivacije funkcije f iznosi

$$f'''(x) = (f''(x))' = [(2 + x)e^x]' = (3 + x)e^x.$$

Uočimo pravilnost i sa sigurnošću pretpostavljamo da je n - ta derivacija funkcije f jednaka

$$f^{(n)}(x) = (n + x)e^x.$$

Da bi zadatak bio u potpunosti riješen, našu pretpostavku dokažimo metodom matematičke indukcije:

Baza indukcije: za $n = 1$ imamo $f'(x) = (1 + x)e^x$, a to smo prethodno deriviranjem i dobili.

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da je tvrdnja istinita za prirodni broj $n = k$, tj. $f^{(k)}(x) = (k + x)e^x$.

Korak indukcije: pokažimo da tvrdnja vrijedi za prirodni broj $n = k + 1$ tj. da vrijedi $f^{(k+1)}(x) = (1 + k + x)e^x$.
Zaista,

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = ((k + x)e^x)' = e^x + (k + x)e^x = (1 + k + x)e^x,$$

a to smo i trebali pokazati.

Neka je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$.

TANGENTA

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Derivacija funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ predstavlja koeficijent smjera tangente na graf funkcije u toj točki i jednaka je tangensu kuta koji ta tangenta zatvara s pozitivnim smjerom osi apscisa.

NORMALA

Jednadžba normale na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi:

- ako je $f'(x_0) \neq 0$,
$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$
- ako je $f'(x_0) = 0$,
$$x = x_0.$$

ZADATAK 1. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x) = x^2 + 5x + 7$ u točki s apscisom $x_0 = 1$.

Rješenje.

Derivacija funkcije f jednaka je

$$f'(x) = (x^2 + 5x + 7)' = 2x + 5.$$

Koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $x_0 = 1$ iznosi

$$f'(x_0) = 2 \cdot 1 + 5 = 7.$$

Vrijednost funkcije f u točki $x_0 = 1$ iznosi

$$f(x_0) = 1^2 + 5 \cdot 1 + 7 = 13.$$

Stoga jednadžba tangente na graf funkcije f u točki s apscisom $x_0 = 1$ glasi

$$y = 7(x - 1) + 13,$$

odnosno

$$y = 7x + 6.$$

Kako je normala na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ pravac okomit na tangentu i prolazi točkom $(x_0, f(x_0))$, jednadžba normale dane funkcije f u točki s apscisom $x_0 = 1$ jednaka je

$$y = -\frac{1}{7}(x - 1) + 13.$$

ZADATAK 2. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x) = x^2 - 5x + 6$ u točki s apscisom $x_0 = \frac{5}{2}$.

Rješenje.

Derivacija funkcije f jednaka je

$$f'(x) = (x^2 - 5x + 6)' = 2x - 5,$$

a $f'(x_0) = 0$. Nadalje vrijedi $f(x_0) = -\frac{1}{4}$, te stoga jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $x_0 = \frac{5}{2}$ glasi

$$y + \frac{1}{4} = 0,$$

dok jednadžba normale glasi

$$x = \frac{5}{2}.$$

ZADATAK 3. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x) = e^{2x}$ u točki s apscisom $x_0 = \ln 2$.

Rješenje. Kako je derivacija funkcije f jednaka

$$f'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x},$$

njena vrijednost u točki $x_0 = \ln 2$ iznosi

$$f'(x_0) = 2e^{2\ln 2} = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Nadalje, vrijednost funkcije f u istoj točki jednaka je

$$f(x_0) = e^{2\ln 2} = 4.$$

Stoga je jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $x_0 = \ln 2$ jednaka

$$y = 8(x - \ln 2) + 4,$$

a jednadžba normale je

$$y = -\frac{1}{8}(x - \ln 2) + 4.$$

ZADATAK 4. Odredite kut α koji tangenta na graf funkcije $f(x) = -x^2 + 3x$ u točki s apscisom $x_0 = 1$ zatvara s pozitivnim smjerom osi x.

Rješenje.

Budući je derivacija funkcije f jednaka

$$f'(x) = (-x^2 + 3x)' = -2x + 3,$$

u točki $x_0 = 1$ ima vrijednost

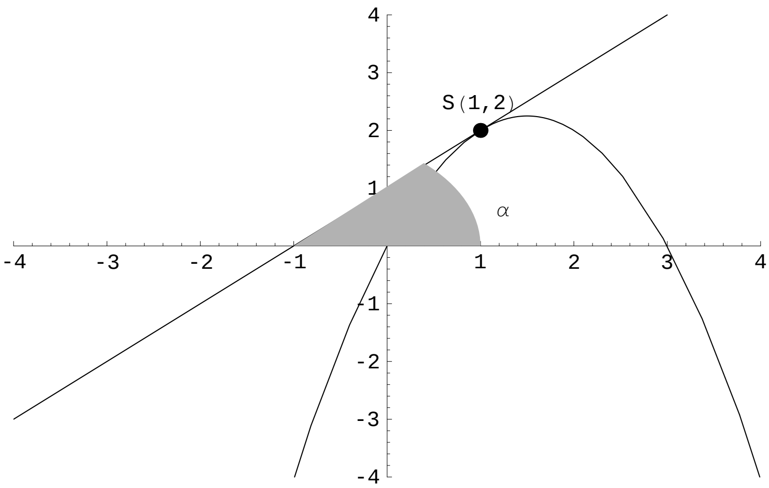
$$f'(x_0) = -2 \cdot 1 + 3 = 1.$$

Kako je

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

traženi kut iznosi

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$



Slika 1: Tangenta na graf funkcije $f(x) = -x^2 + 3x$ i kut α

L'Hopitalovo pravilo

Ovo pravilo od izuzetnog je značaja za računanje limesa funkcije kada se javljaju neodređeni oblici $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty$ i ∞^0.

U potpunosti navodimo primjenu pravila za limese oblika $\frac{0}{0}$:

Neka su f i g bilo koje dvije funkcije takve da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Ako su ispunjene sljedeće pretpostavke:

(i) postoje realan broj $\delta > 0$ takav da su funkcije f i g derivabilne u svakoj točki intervala $\langle a-\delta, a+\delta\rangle$, osim možda u točki a,

(ii) $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle a-\delta, a+\delta\rangle \backslash \{a\}$,

(iii) postoji $L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

onda je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uz male modifikacije uvjeta analogno pravilo vrijedi i za limese oblika $\frac{\infty}{\infty}$, kao i za jednostrane limese.

Zadatak 1. Primjenom L'Hopitalovog pravila izračunajte limese

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin x - x\cos x}$.

Rješenje.

(a) Nakon uvrštavanja $x = 0$ funkcija u brojniku i funkcija u nazivniku poprima vrijednost nula, pa je zadani limes neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$. Primjenom L'Hospitalovog pravila slijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

(b) Limes je neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$, pa primjenom L'Hospitalovog pravilo dobivamo

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - 2x - 3)'}{(x^2 - x - 6)'} = \lim_{x\to 3} \frac{2x - 2}{2x - 1} = \frac{4}{5}$$

(c) Iz istog razloga, kao u prethodnim primjerima, primjenimo L'Hospitalovo pravilo i dobivamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\sin x - x\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(\sin x - x\cos x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x - \cos x + x\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x\sin x}
\end{aligned}$$

Kako je dobiveni limes neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$, ponovnom primjenom L'Hospitalovog pravila slijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x}.$$

Budući da smo ponovno dobili limes neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$, opet primjenimo L'Hospitalovo pravilo i dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{1}{2}.$$

Zadatak 2. Primjenom L'Hopitalovog pravila izračunajte limese

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x + e^x}$

(c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1}\right)$

(d) $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

Rješenje.

(a) Limes je neodređenog oblika $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, pa primjenom L'Hospitalovo pravilo dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(b) Kako je dani limes neodređenog oblika $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, primjenom L'Hospitalovog pravila slijedi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(x+e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

(c) Zadani limes je neodređenog oblika $(\infty-\infty)$, pa svođenjem na zajednički nazivnik izraza u zagradi dobivamo neodređeni oblik $\left(\frac{0}{0}\right)$ na koji možemo primjeniti L'Hospitalovo pravilo. Dobivamo

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)'}{(x^3-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x^2}=1.$$

(d) Budući da je dani limes je neodređenog oblika $(0\cdot\infty)$, funkciju pod znakom limesa napisat ćemo u drugom obliku, kako bi dobili neodređeni oblik $\left(\frac{0}{0}\right)$ na koji možemo primjeniti L'Hospitalovo pravilo.

$$\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$$

Zadatak 3. Primjenom L'Hopitalovog pravila izračunajte $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje.

Zadani limes je neodređenog oblika 1^∞. Označimo ga s A, dakle

$$A=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

Logaritmiranjem dobivamo

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

Kako je $\ln x$ neprekidna funkcija vrijedi $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]$, pa slijedi

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

Odnosno

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x}.$$

Dobiveni limes je neodređenog oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$, te na njega možemo primjeniti L'Hospitalovo pravilo.

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\cos x)]'}{[x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{1}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

Kako je $\ln A = 0$, slijedi $A = e^0$, pa je

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Neodređeni oblici 1^∞, 0^0 i ∞^0 rješavaju se logaritmiranjem.

Intervali monotonosti, lokani ekstremi, konveksnost, konkavnost i točke infleksije

---

Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, derivabilna na $\langle a, b\rangle$.

- Funkcija f je monotono rastuća na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \geq 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Ako je $f'(x) > 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda funkcija f strogo monotono raste na $\langle a, b\rangle$.
- Funkcija f je monotono padajuća na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f'(x) \leq 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Ako je $f'(x) < 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, onda funkcija f strogo monotono pada na $\langle a, b\rangle$.

Neka je $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ derivabilna na skupu $\langle a, b\rangle$ te $x_0 \in \langle a, b\rangle$.

- Ako je $f'(x_0) = 0$, kažemo da je x_0 **stacionarna točka** funkcije f.
- Ako je x_0 stacionalrna točka funkcije f i $f''(x_0) < 0$, onda je točka x_0 točka strogog lokalnog maksimuma funkcije f.
- Ako je x_0 stacionarna točka funkcije f i $f''(x_0) > 0$, onda je točka x_0 točka strogog lokalnog minimuma funkcije f.
- Funkcija f je konveksna na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.
- Funkcija f je konkavna na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f''(x) \leq 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.
- Točku $x_1 \in \langle a, b\rangle$ nazivamo **točkom infleksije** funkcije f ako postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je f strogo konveksna na $\langle x_1 - \delta, x_1\rangle$ i strogo konkavna na $\langle x_1, x_1 + \delta\rangle$ ili da je f konkavna na $\langle x_1 - \delta, x_1\rangle$ i konveksna na $\langle x_1, x_1 + \delta\rangle$.
- Neka je f dva puta derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Točka $x_1 \in \langle a, b\rangle$ je točka infleksije funkcije f onda i samo onda ako funkcija f' ima strogi lokalni ekstrem u x_1.

Zadatak 1. Odredite intervale monotonosti funkcija

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$.

Rješenje.

(a) Derivacija funkcije f iznosi

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

Kako je

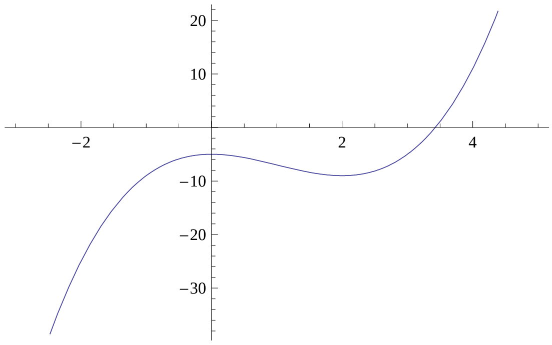
$$f'(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle,$$

funkcija f strogo monotono raste na skupu $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$.

Nadalje

$$f'(x) < 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle 0, 2\rangle,$$

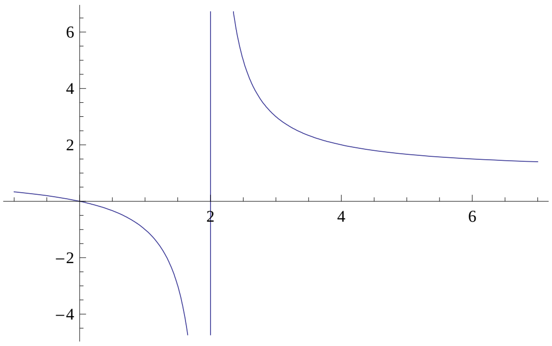
pa funkcija f strogo monotono pada na skupu $\langle 0, 2\rangle$.



Slika 2: Graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$

(b) Područje definicije funkcije f je skup $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, a derivacija funkcije iznosi

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - x \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}.$$

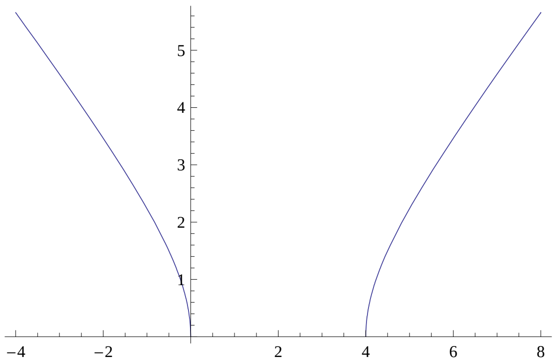


Slika 3: Graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Budući da je $(x-2)^2 > 0$ za svaki x iz domene funkcije f, onda je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, pa funkcija f strogo monotono pada na skupu $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

(c) Područje definicije funkcije f je skup $\langle -\infty, 0] \cup [4, \infty\rangle$. Derivacija funkcije iznosi

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x}} \cdot (2x - 4) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x}}.$$



Slika 4: Graf funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

Nejednakost $f'(x) > 0$ vrijedi ako je $(x-2) > 0$, odnosno $x > 2$ za svaki x iz domene dane funkcije. Dakle, zbog uvjeta na domenu funkcije,

$$f'(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle 4, \infty \rangle.$$

S druge strane, $f'(x) < 0$ vrijedi ako je $(x-2) < 0$, odnosno $x < 2$ za svaki x iz domene dane funkcije. Analogno, zbog uvjeta na domenu funkcije,

$$f'(x) < 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle -\infty, 0 \rangle,$$

pa funkcija f strogo monotono raste na skupu $\langle 4, \infty \rangle$, a strogo monotono pada na skupu $\langle -\infty, 0 \rangle$. Uočite da smo rubove intervala isključili, jer u njima $f'(x)$ nije niti definirana!

ZADATAK 2. Odredite lokalne ekstreme funkcija

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

(b) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Rješenje.

(a) Područje definicije funkcije f je skup $\mathbb{R} \backslash \{3\}$, a njena prva derivacija iznosi

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - x^2 \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}.$$

Nužan uvijet za postojanje lokalnog ekstrema u točki x je $f'(x) = 0$. Dakle

$$x(x-6) = 0,$$

pa su $x_1 = 0$ i $x_2 = 6$ rješenja dane jednadžbe, odnosno stacionarne točke. Ispitajmo dovoljan uvijet postojanja ekstrema za dobivene stacionarne točke. Druga derivacija funkcije iznosi

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2 - 6x) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)^3}.$$

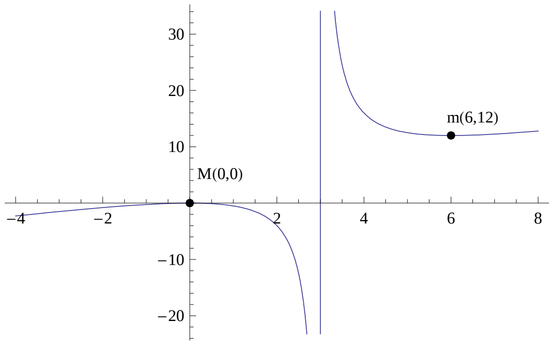
Kako je

$$f''(0) = -\frac{2}{3} < 0$$

funkcija f postiže strogi lokalni maksimum u točki $M(0, f(0))$, tj. u točki $M(0,0)$. Nadalje

$$f''(6) = \frac{2}{3} > 0$$

pa funkcija f u točki $m(6, f(6))$, tj. u točki $m(6, 12)$ ima strogi lokalni minimum.



Slika 5: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$

(b) Područje definicije funkcije f je skup $\mathbb{R}$. Prva derivacija glasi

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2),$$

pa je $f'(x) = 0$ ekvivalentno sa $2x - x^2 = 0$. Dakle, $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$ su stacionarne točke dane funkcije. Druga derivacija funkcije je jednaka

$$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

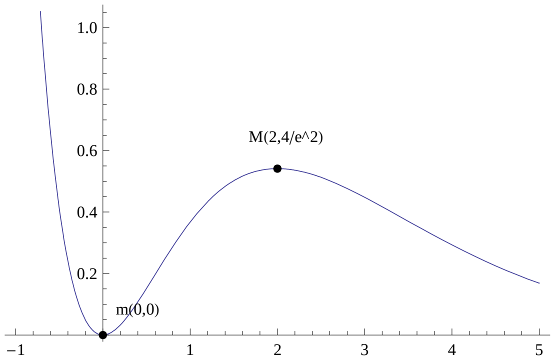
Kako je

$$f''(0) = 2 > 0$$

funkcija f postiže strogi lokalni minimum u točki $m(0,0)$. Nadalje

$$f''(2) = \frac{-2}{e^2} < 0$$

pa funkcija f u točki $M(2, 4/e^2)$ ima strogi lokalni maksimum.



Slika 6: Graf funkcije $f(x) = x^2e^{-x}$

Zadatak 3. Odredite intervale konveksnosti, intervale konkavnosti i točke infleksije funkcija

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Rješenje.

(a) Domena funkcije f je skup $\mathbb{R}\backslash\{-5\}$. Prva i druga derivacija funkcije iznose

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+5)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+5)^3}.$$

Kako je $f''(x) \neq 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}\backslash\{-5\}$, funkcija nema točke infleksije. Nejednadžba $f''(x) > 0$ vrijedi ako je $(x+5) > 0$, odnosno $x > -5$ za svaki x iz domene dane funkcije. Nejednadžba $f''(x) < 0$ vrijedi ako je $(x+5) < 0$, odnosno $x < -5$ za svaki x iz domene dane funkcije. Dakle,

$$f''(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle -5, \infty \rangle$$

i

$$f''(x) < 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle -\infty, -5 \rangle,$$

pa je funkcija f konveksna na skupu $\langle -5, \infty \rangle$, a konkavna na skupu $\langle -\infty, -5 \rangle$.

(b) Područje definicije funkcije f je skup $\mathbb{R}$. Izračunamo prvu i drugu derivaciju funkcije

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Kako je nejednadžba $f''(x) > 0$ ekvivalentna s $1 - x^2 > 0$, vrijedi

$$f''(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Kako je nejednadžba $f''(x) < 0$ ekvivalentna s $1 - x^2 < 0$, vrijedi

$$f''(x) < 0 \quad \text{za} \quad x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle.$$

Dakle, funkcija f je konveksna na skupu $\langle -1, 1 \rangle$, a konkavna na skupu $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$. Također zaključujemo da su $x_1 = -1$ te $x_2 = 1$ točke infleksije zadane funkcije.