

ZADACI ZA SAMOSTALNO RJEŠAVANJE: DIFERENCIJALNI RAČUN

DERIVACIJE

ZADATAK 1. Ispitajte derivabilnost funkcije $f(x) = x^2 + 3$ u proizvoljnoj fiksnoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Rj. $2x_0$

ZADATAK 2. Funkcija f je zadana formulom $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Koristeći definicionu formulu derivacije izračunajte $f'(1)$.

Rj. -1

ZADATAK 3. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x^4} + 2^7$ Rj. $2x + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ Rj. $\frac{7}{6}\sqrt[6]{x} - \frac{3}{4x\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \log_3 x + 2 \ln x$ Rj. $\frac{1}{x} \log_3 e + \frac{2}{x}$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ Rj. 0

ZADATAK 4. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = 2^x \cdot \sqrt[5]{x^3}$ Rj. $2^x \left(x^{\frac{3}{5}} \ln 2 + \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} \right)$

(b) $f(x) = (x^2 - 4x + 5) e^x$ Rj. $(x-1)^2 e^x$

(c) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x + \sin x$ Rj. $2 \cos x$

(d) $f(x) = \log_3 x \cdot \ln 2 - \log_2 x \cdot \ln x$ Rj. $\frac{1}{x} \left(\frac{\ln 2}{\ln 3} - \frac{\ln x}{\ln 2} - \log_2 x \right)$

ZADATAK 5. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \frac{5x-2}{3x}$ Rj. $\frac{2}{3x^2}$

(b) $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 4}{1+x-3x^2}$ Rj. $\frac{8x^2 - 26x + 7}{(1+x-3x^2)^2}$

(c) $f(x) = \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x - x \sin x}$ Rj. $\frac{x^2 + 2}{(\cos x - x \sin x)^2}$

ZADATAK 6. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = e^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

Rj. $-e^{\frac{1}{\sin^2 x}} \cdot \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$

(b) $f(x) = \ln(\ln x) - \ln^2 x$

Rj. $\frac{1}{x \ln x} - \frac{2 \ln x}{x}$

(c) $f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Rj. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

(d) $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Rj. $\frac{1}{1+x^2}$

(e) $f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$

Rj. $\frac{4 \cos 2x}{(1 - \sin 2x)^2}$

ZADATAK 7. Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$

Rj. $(\cos x)^{\sin x} [\cos x \cdot \ln \cos x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x]$

(b) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$

Rj. $(\operatorname{arctg} x)^x \left[\ln \operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} \right]$

ZADATAK 8. Izračunajte n -tu derivaciju funkcije $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$ u točki $x_0 = 0$.

Rj. $f^{(n)}(0) = (n-1)!$

PRIMJENA DERIVACIJA

ZADATAK 1. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ u točki s apscisom $x_0 = -2$.

Rj. $y = -14x - 11, \quad y = \frac{1}{14}x + 17\frac{1}{7}$

ZADATAK 2. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3x+2}$ u točki s apscisom $x_0 = 2$.

Rj. $y = -\frac{3}{64}x + \frac{7}{32}, \quad y = \frac{64}{3}x - 42\frac{13}{24}$

ZADATAK 3. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x) = \ln(x+2)$ u sjecištu funkcije s y -osi.

Rj. $y = \frac{1}{2}x + \ln 2, \quad y = -2x + \ln 2$

ZADATAK 4. Odredite jednadžbu tangente krivulje $f(x) = x^2 + x + 2$ koja je paralelna s pravcem $y = x$.

Rj. $y = x + 2$

L'HOPITALOVO PRAVILO

ZADATAK 1. Primjenom L'Hopitalovog pravila izračunajte limese

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 8x}{\sin 3x} \quad \text{Rj. } -\frac{8}{3}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln \cos x} \quad \text{Rj. } -2$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3 \cos x}. \quad \text{Rj. } \frac{1}{6}$$

ZADATAK 2. Primjenom L'Hopitalovog pravila izračunajte limese

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x + 2)}{4x + 5} \quad \text{Rj. } 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} \quad \text{Rj. } 3$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x}{2x - 2} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad \text{Rj. } \frac{1}{2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x} \right) \quad \text{Rj. } \frac{1}{3}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg}^2 x \quad \text{Rj. } \frac{1}{2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x}. \quad \text{Rj. } 2$$

ZADATAK 3. Primjenom L'Hopitalovog pravila izračunajte limese

$$(a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} \quad \text{Rj. } 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad \text{Rj. } e$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^x. \quad \text{Rj. } 1$$

INTERVALI MONOTONOSTI, LOKANI EKSTREMI, KONVEKSNOST, KONKAVNOST I
TOČKE INFLEKSIJE

ZADATAK 1. Odredite intervale monotonosti funkcija

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

Rj. funkcija raste na $\langle -\infty, -2 \rangle$, pada na $\langle -2, \infty \rangle$

(b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

Rj. funkcija raste na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, pada na $\langle -1, 1 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle$

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2x + 3}\right)$

Rj. funkcija pada na $\langle -\frac{3}{2}, \infty \rangle$.

ZADATAK 2. Odredite lokalne ekstreme funkcija

(a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x - \frac{5}{3}$

Rj. $M(-1, -1/3), m(-3, -5/3)$

(b) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Rj. $M(0, -1), m(2, 3)$

(c) $f(x) = x + \sqrt{1 - 2x}$

Rj. $M(0, 1)$

(d) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Rj. $M(1, 1/\sqrt{e}), m(-1, -1/\sqrt{e})$

ZADATAK 3. Odredite intervale konveksnosti, intervale konkavnosti i točke infleksije funkcija

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Rj. konkavna na $\langle -\infty, 1 \rangle$, konveksna na $\langle 1, \infty \rangle$, točka infleksije $I(1, 0)$

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

Rj. konkavna na $\langle -\infty, 0 \rangle$, konveksna na $\langle 0, \infty \rangle$, nema točke infleksije

(c) $f(x) = -xe^x$

Rj. konveksna na $\langle -\infty, -2 \rangle$, konkavna na $\langle -2, \infty \rangle$, točka infleksije $I(-2, 2/e^2)$.