Riješeni zadaci: Linearna algebra

Matrice

Definicija. Familiju $\mathbf{A}$ od $m \cdot n$ realnih (kompleksnih) brojeva $a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ zapisanih u obliku pravokutne tablice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

nazivamo realnom (kompleksnom) matricom tipa $m \times n$.
Brojeve $a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$, nazivamo **elementi matrice**.
Za $m = n$ matrica je kvadratna. Od svih kvadratnih matrica posebno su važne **jedinična matrica I** i **nul matrica 0**:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicija. Neka su $\mathbf{A} = (a_{ij})$ i $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matrice tipa $m \times n$. Zbroj matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je matrica $\mathbf{C} = (c_{ij})$ tipa $m \times n$, s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Zadatak 1. Zbrojite matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+1 & 5+3 \\ 0+0 & -2+2 & 0+3 \\ 3+0 & 4+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija. Produkt matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$, tipa $m \times n$, skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ definira se kao:

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \ldots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2. Skalarima $\alpha = 3$ i $\alpha = -4$ pomnožite matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 11 \\ 11 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 11 \\ 11 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 18 \\ 15 & -6 & 33 \\ 33 & 6 & 21 \end{bmatrix},$$

$$-4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 11 \\ 11 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 & -24 \\ -20 & 8 & -44 \\ -44 & -8 & -28 \end{bmatrix}.$$

Definicija. Produkt matrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$, tipa $m \times n$ i $\mathbf{B} = (b_{ij})$, tipa $n \times p$ je matrica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ij})$ tipa $m \times p$, čiji se elementi računaju po formuli $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Napomena. Množiti možemo samo matrice koje su "ulančane".

Zadatak 3. Izračunajte produkt matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot c_2 & a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot d_2 \\ c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot d_2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4. Za matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix},$$

izračunajte:

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, c) $\mathbf{AB}$, d) $\mathbf{BA}$.

Rješenje.

a)

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+2 & 5+1 \\ -2+9 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 5-1 \\ -2-9 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 9 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 2+5\cdot 9 & 1\cdot 1+5\cdot 2\\ -2\cdot 2+3\cdot 9 & -2\cdot 1+3\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47 & 11\\ 23 & 4\end{bmatrix}.$$

d)

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 9 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+1\cdot -2 & 2\cdot 5+1\cdot 3\\ 9\cdot 1+2\cdot -2 & 9\cdot 5+2\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 13\\ 5 & 51\end{bmatrix}$$

.

ZADATAK 5. Za matrice

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -4\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 9 & -3 & 3\\ 4 & 5 & 7\end{bmatrix},$$

izračunajte:

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, b) $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, c) $\mathbf{AB}$, d) $\mathbf{BA}$.

Rješenje.

a)

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2+4 & 4+2 & 3+1\\ -2+9 & 5-3 & 1+3\\ 3+4 & 2+5 & -4+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 6 & 4\\ 7 & 2 & 4\\ 7 & 7 & 3\end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}-\mathbf{B} &= \begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -2 & -1\\ -9 & 3 & -3\\ -4 & -5 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-4 & 4-2 & 3-1\\ -2-9 & 5+3 & 1-3\\ 3-4 & 2-5 & -4-7\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ -11 & 8 & -2\\ -1 & -3 & -11\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 1\\ 3 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 9 & -3 & 3\\ 4 & 5 & 7\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2\cdot 4+4\cdot 9+3\cdot 4 & 2\cdot 2+4\cdot(-3)+3\cdot 5 & 2\cdot 1+4\cdot 3+3\cdot 7\\ -2\cdot 4+5\cdot 9+1\cdot 4 & -2\cdot 2+5\cdot -3+1\cdot 5 & -2\cdot 1+5\cdot 3+1\cdot 7\\ 3\cdot 4+2\cdot 9-4\cdot 4 & 3\cdot 2+2\cdot(-3)-4\cdot 5 & 3\cdot 1+2\cdot 3-4\cdot 7\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}56 & 7 & 35\\ 41 & -14 & 20\\ 14 & -20 & -19\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4\cdot 2+2\cdot(-2)+1\cdot 3 & 4\cdot 4+2\cdot 5+1\cdot 2 & 4\cdot 3+2\cdot 1+1\cdot(-4) \\ 9\cdot 2-3\cdot(-2)+3\cdot 3 & 9\cdot 4-3\cdot 5+3\cdot 2 & 9\cdot 3-3\cdot 1+3\cdot(-4) \\ 4\cdot 2+5\cdot(-2)+7\cdot 3 & 4\cdot 4+5\cdot 5+7\cdot 2 & 4\cdot 3+5\cdot 1+7\cdot(-4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 28 & 10 \\ 33 & 27 & 12 \\ 19 & 55 & -11 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Napomena. Iz prethodna dva zadatka možemo uočiti da množenje matrica općenito nije komutatitvno.

ZADATAK 6. Izračunajte sljedeće produkte matrica

a) $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -7 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4+9\cdot 5+1\cdot 4 & 2\cdot 2+9\cdot 1+1\cdot 2 \\ 7\cdot 4-4\cdot 5-1\cdot 4 & 7\cdot 2-4\cdot 1-1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 & 15 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot 2+5\cdot(-2)+7\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \end{bmatrix}$.

c)
$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -7 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4\cdot 1+1\cdot 9-5\cdot 1 & 4\cdot 2+1\cdot(-4)-5\cdot 4 & 4\cdot(-1)+1\cdot 4-5\cdot 2 \\ -7\cdot 1+2\cdot 9+8\cdot 1 & -7\cdot 2+2\cdot(-4)+8\cdot 4 & -7\cdot(-1)+2\cdot 4+8\cdot 2 \\ 1\cdot 1+2\cdot 9-1\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot(-4)-1\cdot 4 & 1\cdot(-1)+2\cdot 4-1\cdot 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 8 & -16 & -10 \\ 19 & 10 & 31 \\ 18 & -10 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Neke specijalne matrice

Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica $n-$tog reda.

- Za njene dijagonalne elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ kažemo da leže na **glavnoj dijagonali**, a njihov zbroj označavamo s tr$\mathbf{A}$ i zovemo **trag** matrice A.
- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **dijagonalna**, ako su joj svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli.
- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **gornje trokutasta**, ako su joj svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli.
- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **donje trokutasta**, ako su joj svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrica tipa $m \times n$. Pomoću nje definiramo $n \times m$ matricu $\mathbf{A}^T = (a_{ij}^T)$, tako da je $a_{ij}^T = a_{ji}$. Matricu $\mathbf{A}^T$ nazivamo **transponiranom matricom** matrice $\mathbf{A}$.

- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **simetrična** ako je $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.
- Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n-$tog reda kažemo da je **antisimetrična** ako je $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.
  Antisimetrična matrica na glavnoj dijagonali ima nule.

Zadatak 7. Izračunajte trag sljedećih matrica:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 9 & -1 \\ 6 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 14 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -8 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

a) tr$\mathbf{A} = -1 + 15 = 14$,

b) tr$\mathbf{B} = 10 - 4 + 14 = 20$,

c) tr$\mathbf{C} = -2 + 1 + 9 + 3 = 11$.

Zadatak 8. Provjerite jesu li sljedeće matrice simetrične, antisimetrične ili niti jedno od navedenog.

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ -6 & 0 & 3 \\ -8 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -8 \\ 6 & 1 & 2 \\ 5 & 9 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

a) $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$. Matrica $\mathbf{A}$ je simetrična.

b) $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -8 \\ 6 & 0 & -3 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{B}^T$. Matrica $\mathbf{B}$ je antisimetrična.

c) $\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \\ -8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Matrica $\mathbf{C}$ nije niti simetrična, niti antisimetrična.

Regularne matrice

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je **regularna** ili **invertibilna**, ako postoji kvadratna matrica $\mathbf{B}$ takva da je

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}. \qquad (*)$$

U suprotnom za matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je **singularna**.

Matrica $\mathbf{B}$ je (ukoliko postoji) jednoznačno određena zahtjevom $(*)$. Označavamo je s $\mathbf{A}^{-1}$ i nazivamo **inverznom matricom** matrice $\mathbf{A}$.
Prema tome, imamo

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Gaussova metoda za invertiranje matrice
Jednostavna metoda za ispitivanje je li neka matrica regularna, te za određivanje inverza takve matrice je Gaussova metoda koja koristi samo elementarne operacije nad redcima matrice.

Pod Gaussovim elementarnim operacijama nad redcima matrice podrazumijevamo:

1. permutiranje redaka,
2. množenje redka skalarom različitim od nule,
3. dodavanje redku nekog drugog redka prethodno pomnoženog proizvoljnim skalarom.

Napomena. Na potpuno isti način definiraju se elementarne operacije nad stupcima matrice i elementarne operacije nad jednadžbama sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

Inverz matrice $\mathbf{A}$, tipa $n \times n$, tražimo na sljedeći način:
Matricu $\mathbf{A}$ proširimo jediničnom matricom istog tipa. Dobivamo matricu $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$. Zatim, provodimo elementarne operacije nad redcima te nove, proširene matrice, tako da matricu $\mathbf{A}$ pretvaramo u jediničnu matricu, a matrica $\mathbf{I}$ nakon konačno mnogo koraka postaje $\mathbf{A}^{-1}$.

Zadatak 9. Gaussovom metodom nađite inverz sljedećih matrica:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ e) } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

a) Elementarnim operacijama nad redcima dobivamo:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 7 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1/7 & -2/7 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1/7 & -2/7 \\ 2 & 0 & 3/7 & 1/7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1/7 & -2/7 \\ 1 & 0 & 3/14 & 1/14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/14 & 1/14 \\ 0 & 1 & 1/7 & -2/7 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/14 & 1/14 \\ 1/7 & -2/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$.

b)

$$\begin{aligned}
[\mathbf{B}, \mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 13/2 & -5/2 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/13 & 2/13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/13 & 1/13 \\ 0 & 1 & -5/13 & 2/13 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/13 & 1/13 \\ -5/13 & 2/13 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

c)

$$[\mathbf{C}, \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Elementarnim operacijama nad redcima matrice $[\mathbf{C}, \mathbf{I}]$ nije moguće dobiti jediničnu matricu na mjestu matrice $\mathbf{C}$. Prema tome, matrica $\mathbf{C}$ je singularna.

d)

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{D},\mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -11 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -11 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -7 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -29 & -19 & -8 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -7 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 19/29 & 8/29 & -7/29 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -12/29 & -2/29 & 9/29 \\ 0 & 0 & 1 & 19/29 & 8/29 & -7/29 \\ 0 & -1 & 0 & 8/29 & 11/29 & -6/29 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -12/29 & -2/29 & 9/29 \\ 0 & 0 & 1 & 19/29 & 8/29 & -7/29 \\ 0 & 1 & 0 & -8/29 & -11/29 & 6/29 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -12/29 & -2/29 & 9/29 \\ 0 & 1 & 0 & -8/29 & -11/29 & 6/29 \\ 0 & 0 & 1 & 19/29 & 8/29 & -7/29 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Dakle, $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} -12/29 & -2/29 & 9/29 \\ -8/29 & -11/29 & 6/29 \\ 19/29 & 8/29 & -7/29 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{29} \begin{bmatrix} -12 & -2 & 9 \\ -8 & -11 & 6 \\ 19 & 8 & -7 \end{bmatrix}.$

e)

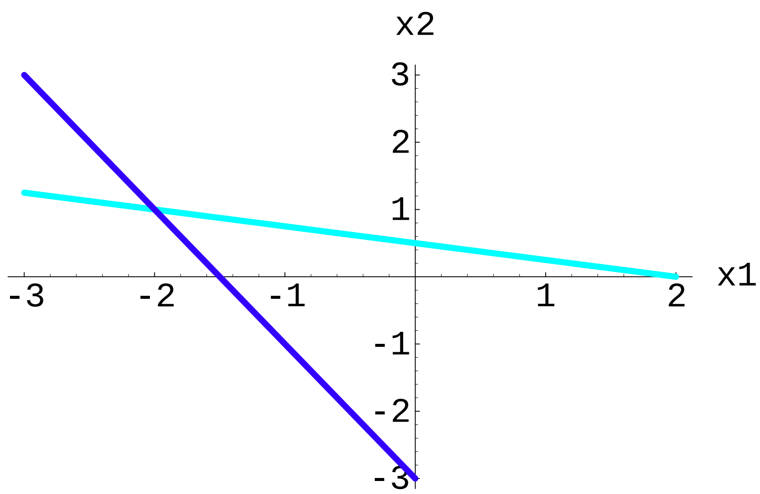
$$
\begin{aligned}
[\mathbf{E},\mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & -10 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & -1/10 & -3/10 & 3/10 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & -1/10 & -3/10 & 3/10 \\ -1 & 0 & 0 & -4/10 & -2/10 & 2/10 \\ 0 & 1 & 0 & 6/10 & 18/10 & -8/10 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & -1/10 & -3/10 & 3/10 \\ 1 & 0 & 0 & 4/10 & 2/10 & -2/10 \\ 0 & 1 & 0 & 6/10 & 18/10 & -8/10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4/10 & 2/10 & -2/10 \\ 0 & 1 & 0 & 6/10 & 18/10 & -8/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 & -3/10 & 3/10 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Dakle, $\mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} 4/10 & 2/10 & -2/10 \\ 6/10 & 18/10 & -8/10 \\ -1/10 & -3/10 & 3/10 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 6 & 18 & -8 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$

ZADATAK 10. Sljedeće sustave linearnih algebarskih jednadžbi prikažite grafički, te iz slike odredite rješenja i objasnite njihov geometrijski smisao:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & -3 \end{array}, \quad \text{b)}\quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & = & 3 \end{array}.$$

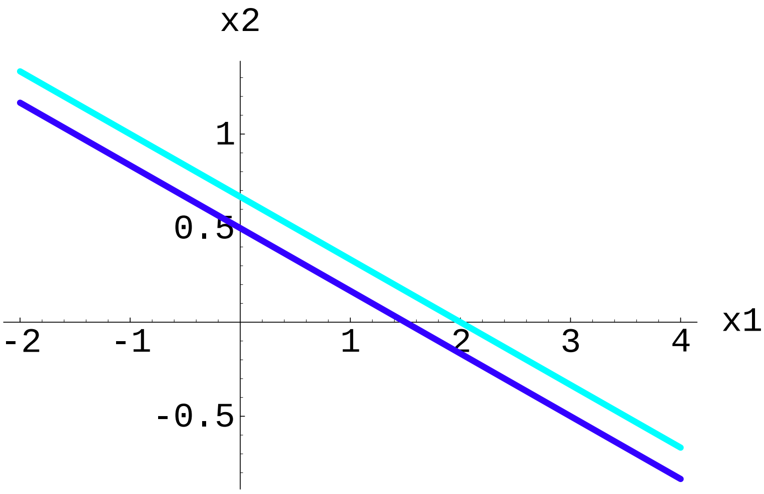
Rješenje.



a)

Slika 1: Rješenje sustava a)

Geometrijski smisao rješenja ovog sustava prikazan je na Slici 1. Rješenje je sjecište pravaca zadanih jednadžbama sustava i lako, sa slike, možemo iščitati da je to $(x_1, x_2) = (-2, 1)$.



b)

Slika 2: Rješenje sustava b)

Geometrijski smisao rješenja ovog sustava prikazan je na Slici 2. Vidimo da se pravci koji odgovaraju jednadžbama sustava ne sijeku. Dakle, sustav nema rješenje, jer nema takvih parova (x_1, x_2) koji bi istovremeno zadovoljavali obje jednadžbe sustava.

Opći oblik sustava od m linearnih algebarskih jednadžbis n nepoznanica, pri čemu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ označavaju nepoznanice, glasi:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (1)$$

- Realne brojeve a_{ij} $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ nazivamo **koeficijentima** sustava, a realne brojeve b_i, $i = 1, \ldots, m$, **slobodnim koeficijentima** sustava.

- Za sustav (1) kažemo da je **homogen** ako su svi slobodni koeficijenti jednaki nuli. U suprotnom, ako je barem jedan od slobodnih koeficijenata različit od nule, za sustav (1) kažemo da je **nehomogen**.

- Za uređenu $n-$torku $(x'_1, \ldots, x'_n)$ brojeva kažemo da je **rješenje** sustava (1), ako je

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x'_1 & + & a_{12}x'_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x'_n & = & b_1 \\ a_{21}x'_1 & + & a_{22}x'_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x'_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x'_1 & + & a_{m2}x'_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x'_n & = & b_m \end{array}$$

- Sustav je **rješiv** ili **konzistentan** ako ima barem jedno rješenje. U suprotnom za sustav kažemo da je **nerješiv** ili **nekonzistentan**.

- Riješiti sustav, tj. naći opće rješenje, znači pronaći sva njegova rješenja.
- Za dva sustava tipa (1) kažemo da su ekvivalentni ako je svako rješenje jednog ujedno i rješenje drugog sustava i obratno.

Matrični zapis sustava

Sustavu (1) pridružit ćemo **matricu sustava A, stupac slobodnih koeficijenata b** i **vektor nepoznanica** x:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Tada sustav (1) možemo kraće zapisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}.$$

Blok matricu

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

zovemo **proširenom matricom sustava** (1).

Gaussova metoda eliminacije za rješavanje sustava linearnih algebarskih jednažbi

Sastoji se u tome da se polazni sustav elementarnim operacijama nad jednadžbama svede na ekvivalentni sustav u gornje trokutastom obliku koji se rješava unazad (odozdo prema gore).

Zadatak 11. Gaussovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave:

$$\text{a)} \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}, \text{ b)} \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 6x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}.$$

Rješenje.

a) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 9/5 \end{array}\right].$$

Riješavamo unazad. Iz zadnjeg redka vidimo da je $x_3 = \dfrac{9}{10}$.

Iz drugog redka vidimo da je $5x_2 = 1 - 5 \cdot \frac{9}{10} = \frac{-7}{2}$. Dakle, $x_2 = -\frac{7}{10}$.

Iz prvog redka slijedi $x_1 = 2 + \frac{4 \cdot 7}{10} - \frac{3 \cdot 9}{10} = \frac{21}{10}$.

Dakle, dobili smo rješenje: $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{21}{10}, \frac{-7}{10}, \frac{9}{10}\right)$.

b) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & 22 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -12 & 22 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 34 & -4 \end{array}\right].$$

Riješavamo unazad. Iz zadnjeg redka vidimo da je $x_3 = \frac{-4}{34} = \frac{-2}{17}$.

Iz drugog redka vidimo da je $x_2 = -x_3 = \frac{2}{17}$.

Iz prvog redka slijedi $x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{12}{17} - \frac{8}{17}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{17} = \frac{7}{17}$.

Dakle, dobili smo rješenje: $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{17}, \frac{2}{17}, \frac{-2}{17}\right)$.

Determinanta $\mathbf{A} \mapsto \det\mathbf{A}$ je funkcija definirana na skupu svih kvadratnih matrica, a poprima vrijednosti iz skupa skalara. Osim oznake $\det\mathbf{A}$ za determinantu kvadratne matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

često se koristi i oznaka

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta matrice definira se induktivno, tj. determinanta matrice $n-$tog reda definira se pomoću determinante matrice $(n-1)-$og reda. Pođimo redom.

Definicija 1. (Determinanta prvog reda) Determinanta matrice $\mathbf{A} = [a]$ je broj a.

Definicija 2. (Determinanta drugog reda) Determinantom matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ zovemo broj $\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Definicija 3. (Determinanta trećeg reda) Determinanta matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ je broj $\mathbf{A} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Definicija 4. (Determinanta $n-$tog reda) Determinanta matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je broj

$$\det\mathbf{A} = a_{11}\det\mathbf{A}_{11} - a_{21}\det\mathbf{A}_{21} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\det\mathbf{A}_{n1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\det\mathbf{A}_{k1}$$

gdje A_{ki} označava matricu A bez k-tog retka i $i-$tog stupca. SVOJSTVA DETERMINANTE

D.1 Matrica $\mathbf{A}$ i transponirana matrica $\mathbf{A}^T$ imaju jednake determinante, tj.

$$\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}^T.$$

D.2 Ako je $A = (a_{ij})$ trokutasta matrica $n-$tog reda, onda je

$$\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

D.3 Ako dva stupca determinante zamjene mjesta, determinanta mijenja predznak.

D.4 Ako matrica $\mathbf{A}$ ima dva jednaka stupca, onda je $\det\mathbf{A} = 0$.

D.5 Determinanta je linearna u svakom svom stupcu, tj. ako je $i-$ti stupac $\mathbf{a}_i$ matrice $\mathbf{A}$ oblika $\mathbf{a}_i = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, gdje su $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ stupci, a λ, μ skalari, onda je

$$\begin{aligned}\det\mathbf{A} &= \det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n]\\ &= \lambda\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n] + \mu\det[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n].\end{aligned}$$

D.6 Ako su svi elementi nekog stupca matrice $\mathbf{A}$ jednaki nula, onda je

$$\det\mathbf{A} = 0.$$

D.7 Determinanta se množi skalarom tako da se samo jedan stupac pomnoži tim skalarom, tj. zajednički faktor svih elemenata nekog stupca može se izlučiti ispred determinante.

D.8 Determinanta ne mijenja vrijednost ako nekom stupcu determinante dodamo linearnu kombinaciju preostalih stupaca.

D.9 Ako je neki stupac determinante linearna kombinacija preostalih stupaca te determinante, onda je determinanta jednaka nuli.

D.10 Matrica $\mathbf{A}$ je regularna onda i samo onda ako je $\det\mathbf{A} \neq 0$.

Napomena. Pravila D.3 $-$ D.9 vrijede i za redke determinante matrice $\mathbf{A}$.

Teorem (Binet-Cauchyjev teorem) Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice istog reda, onda je

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}.$$

Teorem (Laplaceov razvoj determinante)

- po $i-$tom stupcu: $\det\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}\det\mathbf{A}_{ki}$,
- po $i-$tom retku: $\det\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}\det\mathbf{A}_{ik}$.

ZADATAK 12. Izračunajte sljedeće determinante matrica prvog i drugog reda:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$, e) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

a) $\det\mathbf{A} = 4$.

b) $\det\mathbf{B} = -3$.

c) $\det\mathbf{C} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 5 = 8 + 5 = 13$.

d) $\det\mathbf{D} = 9 \cdot (-6) - 4 \cdot 10 = -36 - 40 = -76$.

e) $\det\mathbf{E} = -5 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = -35 - 12 = -47$.

Zadatak 13. Izračunajte sljedeće determinante matrica trećeg reda:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -8 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$, f) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

a)

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \stackrel{\text{D.2}}{=} 1 \cdot 4 \cdot 10 = 40.$$

b)

$$\det\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{D.4}}{=} 0.$$

c)

$$\det\mathbf{C} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -8 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{D.7}}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -8 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{D.4}}{=} 0.$$

d)

$$\begin{aligned} \det\mathbf{D} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (28 - 25) - 2 \cdot (21 - 10) + 3 \cdot (15 - 8) = 3 - 22 + 21 = 2. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\det\mathbf{E} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 5\cdot(-6-7) - 1\cdot(6-5) + 2\cdot(-14-10) = -65-1-48 = -114.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\det\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 8\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 4\cdot(-5-0) + 1\cdot(-3-24) - 8\cdot(0-15) = -20-27+120 = 73.\end{aligned}$$

ZADATAK 14. Izračunajte

a) $\det(\mathbf{AB})$, b) $\det(\mathbf{CD})$, c) $\det(\mathbf{EF})$,

pri čemu su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ i $\mathbf{F}$, matrice iz prethodnog zadatka.

Rješenje.

Koristiti ćemo Binet-Cauchyjev teorem.

a) $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B} = 40\cdot 0 = 0.$

b) $\det(\mathbf{CD}) = \det\mathbf{C}\cdot\det\mathbf{D} = 0\cdot 2 = 0.$

c) $\det(\mathbf{EF}) = \det\mathbf{E}\cdot\det\mathbf{F} = -114\cdot 73 = -8322.$

CRAMEROVO PRAVILO

Cramerovo pravilo služi za rješavanje tzv. kvadratnih sustava tj. sustava kod kojih je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica. Neka je zadan sustav od n jednadžbi s n nepoznanica:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{2}$$

Zapišimo ga u vektorskom obliku:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

gdje su $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ stupci matrice sustava $\mathbf{A}$, a $\mathbf{b}$ vektor slobodnih koeficijenata.
Neka je

$$\mathbf{D} = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinanta matrice sustava (2).
Nadalje, neka je

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

determinanta koja se dobiva iz determinante $\mathbf{D}$ zamjenom $i-$tog stupca stupcem slobodnih koeficijenata.

1. Ako je $\mathbf{D} = 0$, da bi sustav (2) bio rješiv, mora vrijediti

   $$D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0.$$

   U tom slučaju, sustav (2) ima beskonačno mnogo rješenja.
   U suprotnom, sustav (2) nema rješenje.

2. Sustav (2) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\mathbf{D} \neq 0$.
   U tom je slučaju rješenje dano s $x_i = \dfrac{D_i}{\mathbf{D}}$, $i = 1, \dots, n$.

Zadatak 15. Primjenom Cramerovog pravila diskutirajte rješenja sljedećih sustava jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) $$\begin{array}{rcl} x_1 - \lambda x_2 & = & 2 \\ -\lambda x_1 + 4x_2 & = & 4 \end{array},$$

(b) $$\begin{array}{rcl} \lambda x_1 + 2x_2 & = & \lambda \\ 2x_1 + \lambda x_2 & = & 2 \end{array}.$$

Rješenje.

(a) Dobivamo da je

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 - \lambda^2. \\ D_1 &= \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 4\lambda \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -\lambda & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2\lambda. \end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ sustav ima jedinstveno rješenje, za $\lambda = -2$ sustav ima beskonačno rješenja, a za $\lambda = 2$ sustav nema rješenja.

(b) Dobivamo da je

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4. \\ D_1 &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

te možemo zaključiti da za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ sustav ima jedinstveno rješenje, a za $\lambda \in \{-2, 2\}$ sustav ima beskonačno rješenja.

ZADATAK 16. Cramerovim pravilom riješite sljedeće sustave:

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}, \quad \text{b)}\ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 6x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}.$$

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (9 - 7) - 4 \cdot (6 - 2) + 3 \cdot (14 - 6) = 2 - 16 + 24 = 10. \\
D_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot (9 - 7) - 4 \cdot (9 - 2) + 3 \cdot (21 - 6) = 4 - 28 + 45 = 21 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (9 - 2) - 2 \cdot (6 - 2) + 3 \cdot (4 - 6) = 7 - 8 - 6 = -7. \\
D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (6 - 21) - 4 \cdot (4 - 6) + 2 \cdot (14 - 6) = -15 + 8 + 16 = 9.
\end{aligned}$$

Kako je $x_i = \dfrac{D_i}{\mathbf{D}}, i = 1, 2, 3$ dobivamo rješenje:

$(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{21}{10}, \dfrac{-7}{10}, \dfrac{9}{10}\right)$.

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot (2 + 6) - 6 \cdot (1 + 21) - 4 \cdot (2 - 14) = 16 - 132 + 48 = -68. \\
D_1 &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot (2 + 6) - 6 \cdot (1 + 9) - 4 \cdot (2 - 6) = 16 - 60 + 16 = -28.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot (1+9) - 2 \cdot (1+21) - 4 \cdot (3-7) = 20 - 44 + 16 = -8. \\
D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot (6-2) - 6 \cdot (3-7) + 2 \cdot (2-14) = 8 + 24 - 24 = 8.
\end{aligned}
$$

Kako je $x_i = \dfrac{D_i}{\mathbf{D}}, i = 1, 2, 3$ dobivamo rješenje:

$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\dfrac{7}{17}, \dfrac{2}{17}, \dfrac{-2}{17}\Big).$

Napomena. Primjetite da smo iste sustave rješavali u Zadatku 11, pomoću Gaussove metode. Kao što je bilo i za očekivati, rješenja sustava su jednaka, koju god metodu za rješavanje koristili.