Riješeni zadaci: Realni brojevi i realne funkcije jedne realne varijable

Infimum i supremum skupa

Zadatak 1. Neka je $S = (-2,-1) \cup [1,7] \cup \{10\}$. Odrediti: (a) $\inf S$, (b) $\sup S$.

Rješenje. (a) $\inf S = -2$, (b) $\sup S = 10$.

Zadatak 2. Neka je $S = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Odrediti: (a) $\inf S$, (b) $\sup S$, (c) Ima li skup S minimalni element?, (d) Ima li skup S maksimalni element?

Rješenje. Uočimo da je brojnik uvijek 1, a nazivnici rastu, zato je kvocijent sve manji. (a) $\inf S = 0$, (b) $\sup S = \frac{1}{2}$, (c) Kako $\inf S = 0 \notin S$ skup S nema minimalni element, (d) Kako je $\sup S = \frac{1}{2} \in S$, to je $\max S = \frac{1}{2}$.

Zadatak 3. Zadan je skup

$$S = \left\{ \frac{7n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ispitati je li skup S omeđen te ako je odrediti $\inf S$ i $\sup S$.

Rješenje. Pogledajmo prvih nekoliko članova ($n = 1,2,3,4$): $9/2 = 4.5; 16/3 = 5.33333; 23/4 = 5.75; 6; 37/6 = 6.16667$. Uočimo da elementi rastu i da su svi veći od $9/2$.

Nadalje

$$\frac{7n+2}{n+1} = \frac{7n+7\cdot 1-7+2}{n+1} = \frac{7(n+1)-5}{n+1} = 7 - \frac{5}{n+1}.$$

Za svaki $n \in N$ vrijedi

$$\frac{9}{2} \le \frac{7n+2}{n+1} < 7,$$

znači S je omeđen i $\frac{9}{2} \in S$ stoga je $\inf S = \frac{9}{2}$. Iz gornjih nejednakosti vidimo da je izraz $\frac{7n+2}{n+1}$ sve bliži broju 7 stoga je $\sup S = 7$.

Apsolutna vrijednost

Za svaki realan broj $x \in \mathbb{R}$ definira se **apsolutna vrijednost** formulom:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Iz definicije apsolutne vrijednosti vidi se da je $|-x| = |x|$ i $x \le |x|$. Nadalje, uočimo da je $|x| = \sqrt{x^2}$. Pomoću jednakosti $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, lako je provjeriti sljedeća svojstva apsolutne vrijednosti:

1) $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \lvert y\rvert$	2) $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$
3) $\lvert x+y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	4) $\lvert x-y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$
5) $\lvert x\rvert \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$, $a > 0$	6) $\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \rvert \le \lvert x-y\rvert$.

Zadatak 1. Izračunajte

$$\frac{|\sqrt{5}-5|+|\sqrt{20}-6|}{|3-\sqrt{5}|-|2+\sqrt{5}|}.$$

Rješenje. Koristeći definiciju apsolutne vrijednosti imamo:

$$\frac{|\sqrt{5}-5|+|\sqrt{20}-6|}{|3-\sqrt{5}|-|2+\sqrt{5}|}=\frac{-\sqrt{5}+5-\sqrt{20}+6}{3-\sqrt{5}-2-\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{5}+5-2\sqrt{5}+6}{3-\sqrt{5}-2-\sqrt{5}}=\frac{11-3\sqrt{5}}{1-2\sqrt{5}}.$$

Racionalizacijom dobivenog izraza imamo:

$$\frac{11-3\sqrt{5}}{1-2\sqrt{5}}\cdot\frac{1+2\sqrt{5}}{1+2\sqrt{5}}=\frac{-19+19\sqrt{5}}{-19}=1-\sqrt{5}.$$

Zadatak 2. Riješite jednadžbu $|x-2|+6x=0$.
Rješenje.
Promatramo dva slučaja:

$$\begin{array}{rcl} x-2 & < & 0 \\ x & < & 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} x-2 & \geq & 0 \\ x & \geq & 2 \end{array}$$

tada imamo: $\qquad\qquad$ tada imamo:

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & <-\infty,2) \\ -x+2+6x & = & 0 \\ 5x & = & -2 \\ x & = & -\frac{2}{5}\in I_1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} I_2 & = & [2,+\infty> \\ x-2+6x & = & 0 \\ 7x & = & 2 \\ x & = & \frac{2}{7}\notin I_2 \end{array}$$

Rješenje jednadžbe je $x=-\frac{2}{5}$.

Zadatak 3. Riješite jednadžbu $6-|3x+2|=2|x-2|$.
Rješenje.
Promatramo tri slučaja:

$x\in\langle-\infty,-\frac{2}{3}\rangle=:I_1$ $\qquad$ $x\in[-\frac{2}{3},2\rangle=:I_2$ $\qquad$ $x\in[2,\infty\rangle=:I_3$

$$\begin{array}{rcl} 6+3x+2 & = & -2x+4 \\ 5x & = & -4 \\ x & = & -\frac{4}{5}\in I_1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 6-3x-2 & = & -2x+4 \\ -2x & = & \\ x & = & 0\in I_2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 6-3x-2 & = & 2x-4 \\ -5x & = & -8 \\ x & = & \frac{8}{5}\notin I_3 \end{array}$$

Konačno rješenje $x_1=-\frac{4}{5}$, $x_2=0$.

Zadatak 4. Riješite nejednadžbu $|2x-3|-2\leq 0$.
Rješenje.
Promatramo dva slučaja:

$$\begin{array}{rcl} 2x-3 & < & 0 \\ x & < & \frac{3}{2} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} 2x-3 & \geq & 0 \\ x & \geq & \frac{3}{2} \end{array}$$

tada imamo: $\qquad\qquad$ tada imamo:

$$\begin{array}{rcl} -2x+3-2 & \leq & 0 \\ -2x & \leq & -1 \\ x & \geq & \frac{1}{2} \\ x & \in & [\frac{1}{2},\frac{3}{2}\rangle \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} 2x-3-2 & \leq & 0 \\ 2x & \leq & 5 \\ x & \leq & \frac{5}{2} \\ x & \in & [\frac{3}{2},\frac{5}{2}] \end{array}$$

$\Longrightarrow x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\rangle\cup[\frac{3}{2},\frac{5}{2}]=[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$.

ZADATAK 5. Riješite nejednadžbu $|2x-1|+|x+1|>x+3$.

Rješenje.
Promatramo tri slučaja:

$x \in <-\infty,-1>=: I_1$

$$\begin{aligned} -2x+1-x-1 &> x+3 \\ x &< -\frac{3}{4} \end{aligned}$$
$<-\infty,-\frac{3}{4}> \cap I_1 = <-\infty,-1>$

$x \in [-1,\frac{1}{2}\rangle =: I_2$

$$\begin{aligned} -2x+1+x+1 &> x+3 \\ x &< -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
$<-\infty,-\frac{1}{2}> \cap I_2 = [-1,-\frac{1}{2}>$

$x \in [\frac{1}{2},\infty\rangle =: I_3$

$$\begin{aligned} 2x-1+x+1 &> x+3 \\ x &> \frac{3}{2} \end{aligned}$$
$<\frac{3}{2},+\infty> \cap I_3 = <\frac{3}{2},+\infty>$.

Rješenje zadatka je unija rješenja dobivena u gornja tri slučaja
$x \in <-\infty,-1> \cup [-1,-\frac{1}{2}> \cup <\frac{3}{2},+\infty> = <-\infty,-\frac{1}{2}> \cup <\frac{3}{2},+\infty>$.

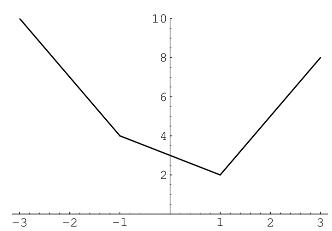
ZADATAK 6. Zapisati funkciju $f(x)=2|x-1|+|x+1|$ bez znaka apsolutne vrijednosti i skicirati njezin graf.

Rješenje. „Ključne točke" su 1 (o njoj ovisi predznak prvog izraza od koga se uzima apsolutna vrijednost) i -1 (o njoj ovisi predznak drugog izraza od kojega se uzima apsolutna vrijednost). Zato je

$$f(x)=\begin{cases} -3x+1, & \text{ako je } x \leq -1 \\ -x+3, & \text{ako je } -1<x\leq 1 \\ 3x-1, & \text{ako je } x \geq 1. \end{cases}$$

Valjanost gornjeg zapisa ćemo provjerit ćemo samo u slučaju $-1<x<1$. Tada je $|x-1|=-(x-1)$ i $|x+1|=x+1$ pa je tada

$$f(x)=2|x-1|+|x+1|=-2(x-1)+(x+1)=-x+3.$$



Slika 2: Graf funkcije $f(x)$

KVADRATNA FUNKCIJA

Polinom drugog stupnja $p(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ nazivamo kvadratna funkcija. Njezin graf je parabola s tjemenom u točki

$$T=(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}).$$

Nultočke kvadratne funkcije su

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Zadatak 1. Odredite realne nultočke i tjeme parabole te skicirajte funkciju ako je

(a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$,

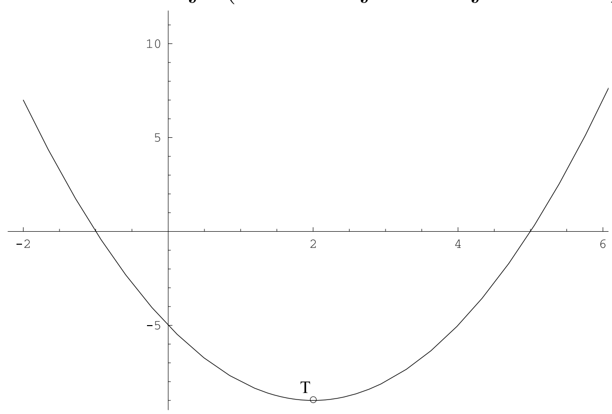
(b) $g(x) = 2x^2 - 4x + 8$.

Rješenje. a) Nultočke i tjeme parabole računamo prema gore navedenim formulama:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3, \quad \Rightarrow x_1 = 2 + 3 = 5, \quad x_2 = 2 - 3 = -1.$$

$$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}) = (-\frac{-4}{2}, -\frac{4^2 + 4 \cdot 5}{4}) = (2, -9).$$

Sada možemo nacrtati funkciju (uočite da je koeficijent uz x^2 pozitivan).



Graf funkcije $f(x)$

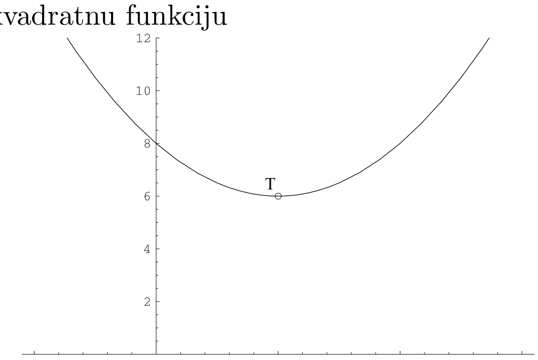
b) Prvo računamo nultočke i tjeme parabole:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{-3}}{4} = 1 \pm \sqrt{-3} (= 1 \pm \sqrt{3}\, i),$$

znači funkcija nema realnih nultočki. Tjeme parabole je

$$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}) = (-\frac{-4}{2 \cdot 2}, -\frac{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}{4 \cdot 2}) = (1, 6).$$

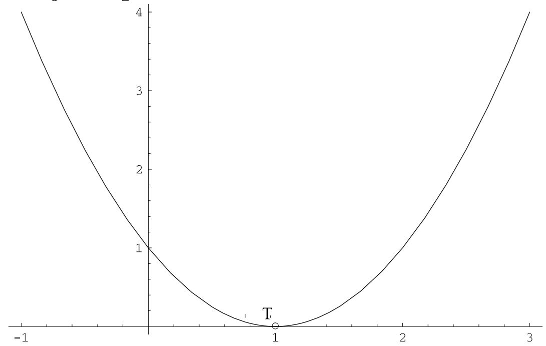
Napomenimo da funkcija nema realnih nultočki što znači da graf funkcije ne siječe x-os. Nadalje, koeficijent uz x^2 je pozitivan što znači da je $g(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Sada možemo nacrtati kvadratnu funkciju



Graf funkcije $g(x)$

Zadatak 2. Odredite nultočke funkcije i skicirajte funkciju te koristeći skicu odredite pad i rast funkcije ako je funkcija zadana formulom $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Rješenje. Uočimo da je $f(x) = (x-1)^2$, iz čega slijedi da je jedina nultočka funkcije jednaka 1 i $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, što znači da graf funkcije dodiruje x-s u jednoj točki koja je ujedno i tjeme parabole. Odmah možemo nacrtati funkciju.



Graf funkcije $f(x)$

Koristeći sliku možemo zaključiti da je funkcija strogo monotono padajuća na $< -\infty, 1]$, dok je funkcija strogo monotono rastuća na $[1, +\infty >$.

Domena funkcije, kompozicija funkcija, invertiranje funkcije, parnost funkcije

---

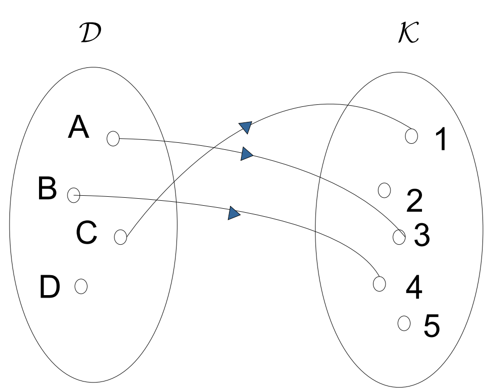
Domene nekih funkcija:

$f(x) = \sqrt{x} \qquad \mathcal{D}_f = [0, \infty\rangle$

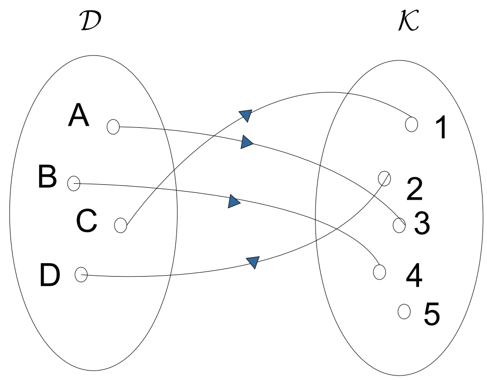
$f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \log_a x, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1 \qquad \mathcal{D}_f = \langle 0, \infty\rangle$

Zadatak 1. Nadopunite sliku tako da se dobije funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$.

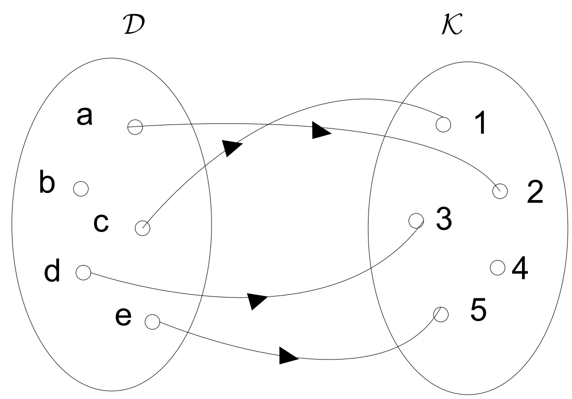


Rješenje. Kako bi dano preslikavanje bilo funkcija svakom elementu domene mora biti pridružen točno jedan element kodomene. Prema tome, potrebno je elementu D koji se nalazi u domeni pridružiti bilo koji element kodomene. Jedno od rješenja prikazano je na sljedećoj slici:

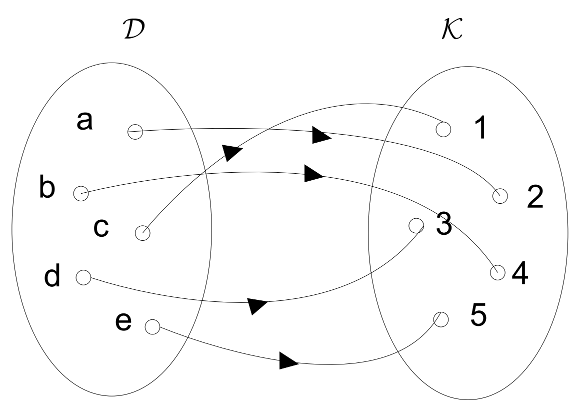


gdje smo elementu D iz domene pridružili element kodomene 2.

Zadatak 2. Nadopunite sliku tako da se dobije bijekcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$.



Rješenje. Kako bi dano preslikavanje bilo bijekcija, ono mora biti injektivno i surjektivno što znači da različite elemente domene moramo preslikati u različite elemente kodomene i dodatno da svaki član kodomene mora biti slika barem jednog (u slučaju bijektivnosti točno jednog) elementa domene. Kako su elementi kodomene 1, 2, 3 i 5 redom slike elemenata c, a, d i e, elementu domene b moramo pridružiti element kodomene 4 kako bi ispunili uvjet zadatka. Rješenje je prikazano na sljedećoj slici:



Zadatak 3. Odredite domenu funkcije zadane formulom:

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{7x+1}{4x-3} - 2} + \frac{e^x}{(x-3)^2}$,

(b) $f(x) = \dfrac{5}{2+\sin x} + \sqrt{x+3}$,

(c) $f(x) = \log_2(2x^2+3x-2)$,

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} + \log 2x + 1$.

Rješenje.

(a) Uočimo da $4x-3 \neq 0$ što će biti zadovoljeno za $x \neq \frac{3}{4}$. Jednako tako mora $x-3 \neq 0$ što je zadovoljeno za $x \neq 3$.
Nadalje, mora vrijediti $\frac{7x+1}{4x-3} - 2 \geq 0$, što ćemo u nastavku raspisati

$$\frac{7x+1}{4x-3} - 2 \geq 0$$

$$\frac{7x+1-8x+6}{4x-3} \geq 0$$

$$\frac{7-x}{4x-3} \geq 0$$

Sada imamo dva slučaja:

$$\begin{array}{rcl} 7-x & \geq & 0 \\ 4x-3 & > & 0 \\ \hline -x & \geq & -7 \\ 4x & > & 3 \\ \hline x & \leq & 7 \\ x & > & \dfrac{3}{4} \\ \hline x & \in & \langle \dfrac{3}{4}, 7] \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 7-x & \leq & 0 \\ 4x-3 & < & 0 \\ \hline -x & \leq & -7 \\ 4x & < & 3 \\ \hline x & \geq & 7 \\ x & < & \dfrac{3}{4} \\ \hline & \emptyset & \end{array}$$

Možemo zaključiti da je $\frac{7x+1}{4x-3} - 2 \geq 0$ za $x \in \langle \dfrac{3}{4}, 7]$. Ako tome dodamo uvjete s početka dobit ćemo konačno rješenje $D_f = \langle \dfrac{3}{4}, 7] \backslash \{3\}$.

(b) U ovom slučaju trebaju biti ispunjena dva uvjeta: izraz u nazivniku prvog člana ne smije biti jednak nula i dodatno izraz pod korijenom treba biti nenegativan, odnosno

$$2 + \sin x \neq 0 \qquad \& \qquad x + 3 \geq 0.$$

Prvi uvjet ispunjen je za svaki realni broj (budući funkcija $\sin x$ poprima vrijednosti između -1 i 1), a nejednadžba je istinita za svaki $x \geq -3$. Domena zadane funkcije je skup $\mathcal{D}_f = [-3, \infty\rangle$.

(c) Logaritmirati možemo samo pozitivne brojeve, te zbog toga mora vrijediti:

$$2x^2 + 3x - 2 > 0.$$

Ako faktoriziramo kvadratni izraz dobivamo:

$$(2x-1)(x+2) > 0,$$

odakle jednostavno zaključimo da je domena funkcije skup $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1/2, \infty\rangle$.

(d) U ovom slučaju moramo zadovoljiti sljedeća dva uvjeta:

$$\frac{1}{x} - 1 \geq 0 \qquad \& \qquad 2x > 0.$$

Drugi uvjet ispunjen je za sve pozitivne realne brojeve, a prvi za $x \in \langle 0, 1]$. Domena funkcije je presjek ova dva skupa, odnosno $\mathcal{D}_f = \langle 0, 1]$.

Zadatak 4. Odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$:

(a) $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 1,$

(b) $f(x) = x^2 + 9x, \quad g(x) = \sqrt{x+9},$

(c) $f(x) = 5^x + 2, \quad g(x) = \log_5(x^2 - 4).$

Rješenje.

(a) Budući da je $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ imamo:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 1 = 2x^2 - 1.$$

Analogno,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x.$$

Primijetimo da komponiranje nije komutativno.

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+9}) = (\sqrt{x+9})^2 + 9\sqrt{x+9} = x + 9 + 9\sqrt{x+9}.$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 9x) = \sqrt{x^2 + 9x + 9}.$

(c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_5(x^2 - 4)) = 5^{\log_5(x^2-4)} + 2 = x^2 - 2.$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5^x + 2) = \log_5((5^x + 2)^2 - 4) = \log_5[5^x(5^x + 4)]$

$= x + \log_5(5^x + 4).$

Neka je $f : D \to K$ realna funkcija realne varijable. Pomoću sljedećeg postupka u većini slučajeva možemo ispitati da li je funkcija f bijekcija:

Iz jednadžbe $f(f^{-1}(x)) = x, x \in K$, računamo $f^{-1}(x)$.
(1) Ako rješenje ne postoji, onda f nije surjekcija.
(2) Ako rješenje nije jedinstveno, onda f nije injekcija.
(3) Ako rješenje postoji i jedinstveno je, onda je f bijekcija i f^{-1} je inverz funkcije f.

Zadatak 5. Odredite inverznu funkciju $f^{-1}(x)$:

(a) $f(x) = 5x - 3$,

(b) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x-5}{7-3x}}$,

(c) $f(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x + 1}{2^x - 5}$,

(d) $f(x) = \log_4 \dfrac{2-x}{x+4}$,

(e) $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

Rješenje.

(a) Inverznu funkciju funkcije f pronalazimo kao rješenje jednadžbe $f(f^{-1}(x)) = x$. Imamo:

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow x = 5f^{-1}(x) - 3, \quad \forall x \in \operatorname{Im} f,$$

odnosno $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{5}$.

(b) Kao i u prethodnom zadatku, rješavamo jednadžbu $f(f^{-1}(x)) = x$:

$$x = \sqrt[4]{\frac{2f^{-1}(x) - 5}{7 - 3f^{-1}(x)}}, \quad \forall x \in \operatorname{Im} f.$$

Potenciranjem jednadžbe i sređivanjem dobivamo $f^{-1}(x) = \dfrac{7x^4+5}{3x^4+2}$.

(c) U ovom slučaju imamo

$$x = \frac{3 \cdot 2^{f^{-1}(x)} + 1}{2^{f^{-1}(x)} - 5}, \quad \forall x \in \operatorname{Im} f.$$

Nakon sređivanja izraza imamo:

$$2^{f^{-1}(x)} = \frac{5x+1}{x-3},$$

te je inverzna funkcija zadana s $f^{-1}(x) = \log_2 \dfrac{5x+1}{x-3}$.

(d) Trebamo riješiti jednadžbu:

$$x = \log_4 \frac{2 - f^{-1}(x)}{f^{-1}(x) + 4}, \quad \forall x \in \operatorname{Im} f.$$

Kako je $x = \log_4 4^x$, izjednačavanjem izraza pod logaritmom dobivamo:

$$4^x = \frac{2 - f^{-1}(x)}{f^{-1}(x) + 4}.$$

Inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = \dfrac{2 - 4^{x+1}}{4^x + 1}$.

(e) Trebamo riješiti jednadžbu:

$$x = \left(f^{-1}(x)\right)^2 + 3 \cdot f^{-1}(x) + 2, \quad \forall x \in \operatorname{Im} f.$$

Dobiveni izraz s desne strane možemo nodopuniti do punog kvadrata, tada imamo

$$x = \left(f^{-1}(x) + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \quad \forall x \in \operatorname{Im} f.$$

Sređivanjem izraza dobit ćemo

$$\frac{4x + 1}{4} = \left(f^{-1}(x) + \frac{3}{2}\right)^2,$$

stoga gornja jednadžba ima dva rješenja:

$$f_1^{-1}(x) = \frac{-3 - \sqrt{1 + 4x}}{2} \qquad \& \qquad f_2^{-1}(x) = \frac{-3 + \sqrt{1 + 4x}}{2},$$

te zaključujemo da funkcija f nije injektivna.

Zadatak 6. Ispitajte parnost funkcije:

(a) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 13$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{\cos x}$,

(c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^5 - 3x} - x^3$.

Rješenje.

(a) $f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 13 = 2x^4 - x^2 + 13 = f(x)$. Funkcija je parna.

(b) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 2(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-x^3 + 2x}{\cos x} = -\dfrac{x^3 - 2x}{\cos x} = -f(x)$. Funkcija je neparna.

(c) $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{(-x)^5 - 3(-x)} - (-x)^3 = \dfrac{-\sin x}{-x^5 + 3x} + x^3 = \dfrac{\sin x}{x^5 - 3x} + x^3$. $f(-x)$ je različito i od $f(x)$ i od $-f(x)$ pa funkcija nije parna niti je neparna.

Zadatak 7. Skicirajte grafove sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = -x^2 + 4$,

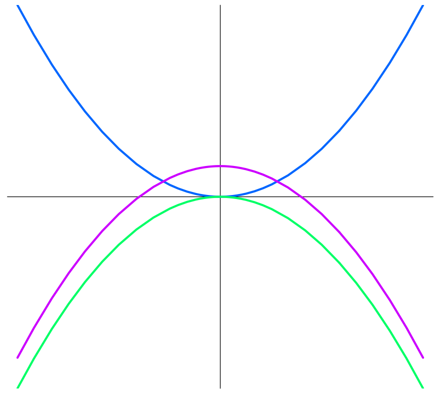
(b) $f(x) = (x + 2)^3 + 2$,

(c) $f(x) = 2 + 3\sin x$,

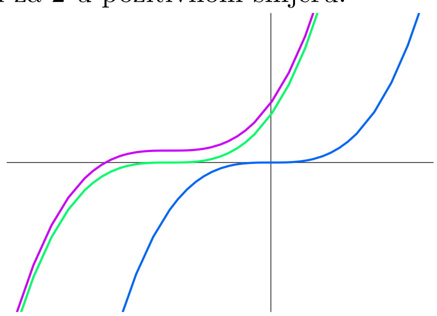
(d) $f(x) = \log(x - 10)$.

Rješenje. Svi grafovi skicirani su korištenjem pomoćnih grafova. Graf zadane funkcije obojan je ljubičastom bojom.

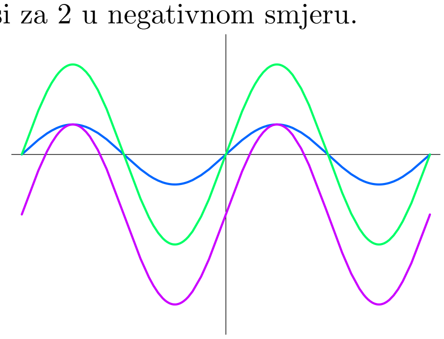
(a) Skiciramo graf funkcije $f_1(x) = x^2$ (plavi), funkcije $f_2(x) = -x^2$ (zeleni) kao osno simetričnu sliku prvog grafa, te traženi graf dobivamo translacijom po $y-$osi za 4 u pozitivnom smjeru.



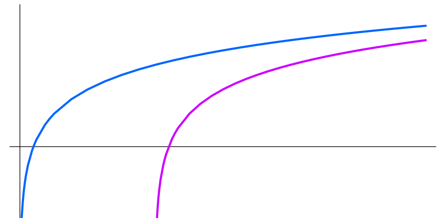
(b) Skiciramo graf funkcije $f_1(x) = x^3$ (plavi), funkcije $f_2(x) = (x+2)^3$ (zeleni) tako da graf funkcije $f_1(x)$ translatiramo po osi x za -2, te traženi graf dobivamo translacijom grafa funkcije $f_2(x)$ po $y-$osi za 2 u pozitivnom smjeru.



(c) Skiciramo graf funkcije $f_1(x) = \sin x$ (plavi), funkcije $f_2(x) = 3\sin x$ (zeleni) tako da graf funkcije $f_1(x)$,,razvučemo" za faktor 3, te traženi graf dobivamo translacijom grafa funkcije $f_2(x)$ po $y-$osi za 2 u negativnom smjeru.



(d) Skiciramo graf funkcije $f_1(x) = \log x$ (plavi). Traženi graf dobivamo translacijom grafa funkcije $f_1(x)$ po $x-$osi za 10.



Elementarne funkcije

Hornerova shema

Polinom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ dijelimo polinomom $x - a$. Kvocijent $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + + b_1 x + b_0$ je polinom stupnja $n-1$. Iz $f(x) = (x-a)q(x) + r$, odnosno

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \; + a_1 x + a_0 = (x-a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \; + b_1 x + b_0) + r,$$

množenjem i uspoređivanjem koeficijenata uz jednake potencije od x dobivamo n jednadžbi s n nepoznanica $(b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0, r)$. Iz tog sustava zaključujemo da za koeficijente kvocijenta $q(x)$ vrijedi: $b_{n-1} = a_n$, $b_{k-1} = a \cdot b_k + a_k$, $k = n-1, n-2, ..., 2, 1$. To se može zapisati u obliku tzv. Hornerove sheme:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = a \cdot b_1 + a_1$	$r = a \cdot b_0 + a_0$

Zadatak 1. Koristeći Hornerovu shemu, izračunajte vrijednost polinoma $f(x) = x^4 - x^3 + 2x - 7$ za $x = 3$.

Rješenje. Primjetimo da će ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ s polinomom $x - 3$ biti jednak $f(3)$,

	1	-1	0	2	-7
3	1	2	6	20	53

odnosno $f(3) = 53$.

Zadatak 2. Za koje a je polinom $f(x) = x^3 + ax + 1$ djeljiv s $g(x) = x - 2$?

Rješenje. Pomoću Hornerove sheme dobivamo:

	1	0	a	1
2	1	2	$4 + a$	$9 + 2a$

Kako bi polinom $f(x)$ bio djeljiv s polinomom $g(x)$ ostatak mora biti jednak 0 iz čega slijedi da je traženi a jednak $-\dfrac{9}{2}$.

Zadatak 3. Faktorizirajte polinom $f(x) = x^3 - 7x + 6$, ako je poznato da je jedna nultočka jednaka 1.

Rješenje. Podijelimo $f(x) = x^3 - 7x + 6$ s $x - 1$. U tu svrhu primjenit ćemo Hornerov algoritam uz $a = 1$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}.$$

Iz gornje tablice i iz Hornerovog algoritma možemo zaključiti da je $x^3 - 7x + 6 = (x^2 + x - 6)(x - 1)$. Ako želimo odrediti sve nultočke funkcije f, moramo odrediti nultočke polinoma $x^2 + x - 6$ što možemo izračunati koristeći formulu za određivanje nultočaka kvadratne jednadžbe:

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Rightarrow x_2 = -3, \quad x_3 = 2.$$

Iz ovoga slijedi da je $x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$.

ZADATAK 4. Riješite eksponencijalne jednadžbe:

(a) $3^{\frac{3x-5}{3-x}} = 3^{2x}$,

(b) $5 \cdot 2^{2x+2} - 2 \cdot 6^{x+1} = 3^{2x+3}$.

Rješenje.

(a) Zbog bijektivnosti eksponencijalne funkcije, jednakost će vrijediti samo u slučaju kada su eksponenti jednaki, odnosno trebamo riješiti jednadžbu:

$$\frac{3x - 5}{3 - x} = 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0, x \neq 3.$$

Sada lako pronađemo rješenja: $x_1 = -1$ i $x_2 = \frac{5}{2}$.

(b) Prvo zapišimo jednadžbu u obliku:

$$20 \cdot (2^x)^2 - 12 \cdot 2^x \cdot 3^x - 27 \cdot (3^x)^2 = 0,$$

te ju podijelimo s $(3^x)^2$

$$20 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 - 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 27 = 0.$$

Supstitucijom $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$20t^2 - 12t - 27 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = -\frac{9}{10}$ i $t_2 = \frac{3}{2}$. Budući je $t_1 < 0$, prvo rješenje ne daje nam rješenje polazne jednadžbe. Iz drugog rješenja imamo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1},$$

pa je $x = -1$ jedino rješenje polazne jednadžbe.

ZADATAK 5. Riješite logaritamske jednadžbe:

(a) $2 - \log_{\frac{1}{4}} x = \log_4(x^2 + 10x + 6)$,

(b) $\log_9^2 x = \log_3^2 \sqrt{1-\frac{x}{4}}$.

Rješenje.

(a) Primijetimo da samo $x > 0$ mogu biti rješenja zadane jednadžbe (izrazi koje logaritmiramo moraju biti pozitivni). Jednadžbu zapišemo u obliku:

$$\log_4 16 + \log_4 x = \log_4(x^2 + 10x + 6) \Leftrightarrow \log_4 16x = \log_4(x^2 + 10x + 6).$$

Zbog bijektivnosti logaritamske funkcije, jednakost će vrijediti samo u slučaju kada su argumenti jednaki, odnosno trebamo riješiti jednadžbu:

$$16x = x^2 + 10x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0.$$

Sada lako pronađemo rješenja: $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ i $x_2 = 3 + \sqrt{3}$.

(b) Primijetimo da samo $x \in \langle 0, 4\rangle$ mogu biti rješenja zadane jednadžbe. Prvo zapišimo jednadžbu u obliku:

$$\frac{1}{2}\log_3^2 x = \frac{1}{2}\log_3^2\left(1 - \frac{x}{4}\right),$$

odnosno jednadžbu možemo faktorizirati:

$$\left(\log_3 x - \log_3\left(1 - \frac{x}{4}\right)\right)\left(\log_3 x + \log_3\left(1 - \frac{x}{4}\right)\right) = 0.$$

Sada trebamo riješiti dvije jednostavnije logaritamske jednadžbe:

$$\log_3 x = \log_3\left(1 - \frac{x}{4}\right) \quad \& \quad \log_3\left(x - \frac{x^2}{4}\right) = 0.$$

Rješenje prve jednadžbe je $x_1 = \dfrac{4}{5}$, a rješenje druge jednadžbe je $x_2 = 2$.

Zadatak 6. Riješite trigonometrijske jednadžbe:

(a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

(b) $\sin x + \cos^2 x = 1$.

Rješenje.

(a) Kako je $\sin u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ jedino za $u = \dfrac{\pi}{4}$ i $u = \dfrac{3\pi}{4}$, $u \in [0, 2\pi]$, mora vrijediti:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{ili} \qquad x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Prema tome rješenja jednadžbe su:

$$x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \qquad \& \qquad x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(b) Prvo zapišimo jednadžbu u obliku:

$$\sin x + 1 - \sin^2 x = 1,$$

odnosno jednadžbu možemo faktorizirati:

$$\sin x(1 - \sin x) = 0,$$

odakle dobivamo:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$