

ZADACI ZA SAMOSTALNO RJEŠAVANJE: REALNI BROJEVI I REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE

INFIMUM I SUPREMUM SKUPA

ZADATAK 1. Pokazati:

- a) $\sup\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$ b) $\inf\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$
c) $\sup\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$ d) $\inf\{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = -1$
e) $\sup\{\frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\} = 1$ f) $\inf\{\frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\} = 0$
g) $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} = \sqrt{2}$ h) $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\} = -\sqrt{2}$.

Da li je supremum[infimum] maksimalan[minimalan] element?

ZADATAK 2. Odrediti infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ 100 \cdot (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Rj.: $\inf S = -100$, $\sup S = 100.5$

ZADATAK 3. Neka je

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x + 1| < 3 \right\} \cup \{2\}$$

Odredite (ako postoje) $\inf S$, $\sup S$, $\min S$ i $\max S$.

Uputa: Uočite da je $S = (-4, 2]$.

KVADRATNA FUNKCIJA

ZADATAK 1. Odrediti realne nultočke i tjeme parabole te skicirajte parabolu

- (a) $f(x) = x^2 - 2x - 15$ Rj.: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $T(1, -16)$
(b) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$. Rj.: $x_{1,2} = \frac{3}{2}$, $T(\frac{3}{2}, 0)$

APSOLUTNA VRIJEDNOST

ZADATAK 1. Riješiti sljedeće nejednadžbe:

- (a) $|2x + 1| \leq \frac{1}{3}$ Rj.: $x \in [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$
(b) $|x + 5| < \frac{3}{4}$ Rj.: $x \in (-\frac{23}{4}, -\frac{17}{4})$

ZADATAK 2. Riješiti jednadžbu $|x + 1| + |x - 2| = 3$.

Rj.: $x \in \{-1, 2\}$

ZADATAK 3. Koliko rješenja ima jednadžba $2x + |x - 5| = 7$?

Rj.: Samo jedno: $x = 2$

ZADATAK 4. Skicirati grafove sljedećih funkcija:

- (a) $f(x) = |x - 2|$
(b) $f(x) = ||x| - 1|$
(c) $f(x) = |x + 2| - |x^2 - 4|$.

ZADATAK 5. Riješiti nejednadžbu $|2^{x+1} - 1| > 2^{x+1}$.

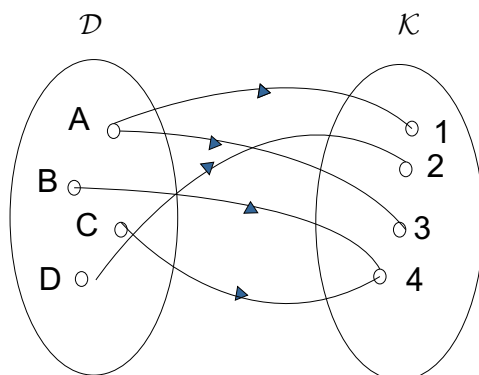
$x \in (-\infty, -2)$

ZADATAK 6. Riješiti nejednadžbu $|\frac{2(x-3)}{x-2}| > x^2 - 4x + 3$.

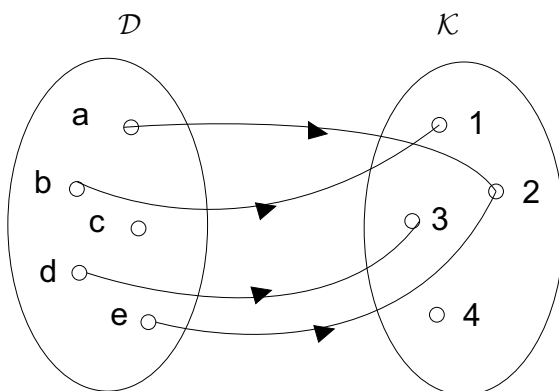
ZADATAK 7. Koliko je $\sqrt{(-x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$?

Rj.: $|x|$

ZADATAK 1. Da li je preslikavanje $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$ funkcija? Obrazložite odgovor!



ZADATAK 2. Nadopunite sliku tako da se dobije surjekcija $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$.



ZADATAK 3. Odredite domenu funkcije zadane formulom:

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$, | Rj.: $D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ |
| (b) $f(x) = \frac{4}{3 - \cos x} - \sqrt{2 - x}$, | Rj.: $D_f = (-\infty, 2]$ |
| (c) $f(x) = \log_5(3x^2 + 5x - 2)$, | Rj.: $D_f = (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$ |
| (d) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2 - x}} + \ln(2x - 1)$. | Rj.: $D_f = (\frac{1}{2}, 2)$ |

ZADATAK 4. Odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$:

- | | | |
|-------------------------|---|--|
| (a) $f(x) = 3x - 2$, | $g(x) = x^2 + 2x$, | |
| . | Rj.: $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 6x - 2$, | $(g \circ f)(x) = 3x(3x - 2)$ |
| (b) $f(x) = x^2 + 9x$, | $g(x) = \sqrt{x + 9}$, | |
| . | Rj.: $(f \circ g)(x) = 9 + x + 9\sqrt{9 + x}$, | $(g \circ f)(x) = \sqrt{9 + 9x + x^2}$ |
| (c) $f(x) = 3^x + 1$, | $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$. | |
| . | Rj.: $(f \circ g)(x) = x^2$, | $(g \circ f)(x) = x + \log_3(2 + 3^x)$ |

ZADATAK 5. Odredite inverznu funkciju $f^{-1}(x)$:

(a) $f(x) = 3x - 1$,

Rj.: $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{6+2x}}$,

Rj.: $f^{-1}(x) = \frac{5-6x^3}{2x^3-1}$

(c) $f(x) = \frac{2 \cdot 3^x - 1}{3^x + 4}$,

Rj.: $f^{-1}(x) = \log_3 \frac{4x+1}{2-x}$

(d) $f(x) = \log_5 \frac{x+3}{4-x}$.

Rj.: $f^{-1}(x) = \frac{4 \cdot 5^x - 3}{5^x + 1}$

ZADATAK 6. Ispitajte parnost funkcije:

(a) $f(x) = 4x^3 - 5x$,

Rj.: funkcija je neparna

(b) $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{\sin x}$,

Rj.: funkcija je neparna

(c) $f(x) = \frac{x^6 - 3}{\cos x} - x^5$.

Rj.: funkcija nije niti parna, niti neparna

ZADATAK 7. Skicirajte grafove sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$,

(b) $f(x) = (x - 1)^3 - 2$,

(c) $f(x) = 2 \cos x + 1$,

(d) $f(x) = \ln(x + 5)$.

ZADATAK 1. Koristeći Hornerovu shemu, izračunajte vrijednost polinoma $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6$ za $x = -2$. Rj.: $f(-2) = -2$

ZADATAK 2. Za koje a je ostatak pri djeljenju polinoma $f(x) = x^5 + x^2 + ax + 5$ polinomom $g(x) = x - 1$ jednak 3? Rj.: $a = -4$

ZADATAK 3. Faktorizirajte polinom $f(x) = x^3 - 7x^2 + 36$. Rj.: $(x + 2)(x - 3)(x - 6)$

ZADATAK 4. Racionalnu funkciju razložite na parcijalne razlomke:

$$(a) R(x) = \frac{x - 1}{(x - 2)(x^2 - 4x + 5)}, \quad \text{Rj.: } \frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-4x+5}$$

$$(b) R(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^3 + x - 2}. \quad \text{Rj.: } x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+x+2}$$

ZADATAK 5. Riješite eksponencijalne jednadžbe:

$$(a) 5^{\frac{2x-1}{2+x}} = 5^{3x}, \quad \text{Rj.: } x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$(b) 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x. \quad \text{Rj.: } x_1 = 0, x_2 = 1$$

ZADATAK 6. Riješite logaritamske jednadžbe:

$$(a) \ln 3x - \ln(x - 1) = 4, \quad \text{Rj.: } x = \frac{e^4}{e^4 - 3}$$

$$(b) \log_8^2 x = \log_2^2 \sqrt[3]{\frac{x}{3} + 2}. \quad \text{Rj.: } x = 3$$

ZADATAK 7. Riješite trigonometrijske jednadžbe:

$$(a) \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{Rj.: } x_1 = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, x_2 = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(b) \sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0. \quad \text{Rj.: } x_1 = k\pi, x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$